

NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Précis  
de

Géométrie descriptive

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Librairie Delagrave

NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Précis

de

Géométrie descriptive

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Librairie Delagrave

# BIBLIOTHÈQUE JUVENTA

(Romans, Nouvelles, Variétés)

*Les ouvrages qui composent cette nouvelle collection sont choisis parmi ceux que préfère la jeunesse.*

(Les livres précédés d'un astérisque conviennent surtout aux jeunes lecteurs.)

Chaque volume (12 x 18,5) illustré, broché. 4.50

Relié toile pleine, rouge, fers spéciaux. 8.50

\* **Le Petit Lord**, par BUNNETT. (trad. E. DUBOIS).  
L'un des livres les plus justement populaires chez les enfants en Angleterre et aux États-Unis.

\* **Les Mémoires d'un Âne**, par la Comtesse de SÉVIGNÉ.  
Les espiègleries de Cadichon auront toujours des lecteurs.

\* **Un Bon Petit diable**, par la Comtesse de SÉVIGNÉ.  
Pas toujours commode à manier, notre héros; mais il a du bon sens et des sentiments qui font oublier ses incartades.

\* **Le Mauvais Génie**, par la Comtesse de SÉVIGNÉ.  
Les effets d'une mauvaise fréquentation sont heureusement corrigés par l'intervention d'un bon génie.

**François le Bossu**, par la Comtesse de SÉVIGNÉ.  
On y voit qu'aux yeux des personnes bien nées la bonté est préférable aux avantages physiques.

**Aventures du Baron de Munchhausen**.  
Récits très amusants, pleins d'imagination.

**Les Chercheurs d'Épaves**, par M. CHAMPAGNE.  
Dramatique récit de recherches au fond de la mer.

**Tarass Boulba**, par GOGOL.

Histoire d'un chef cosaque.

\* **Les Mille et Une Nuits**, (d'après GALLAND).  
Le merveilleux en déborda, charme l'imagination, sans risquer de la corrompre.

**Les Trois petits Mousquetaires**, par DESHADOL.  
Captivante histoire de quatre lycéens (car les trois petits Mousquetaires étaient quatre).

\* **Contes**, par ALEXANDRE DUMAS.  
Huit chefs-d'œuvre.

**Impressions de Voyage en Suisse**, par A. DUMAS.  
Le récit de ce voyage est fait avec beaucoup de verve.

**Acté**, par ALEXANDRE DUMAS.  
Roman des temps néroniens.

**François Bûchamot**, par A. ASSOLLANT.  
Un Grand-Père, vieux soldat de l'An II, raconte ses souvenirs... Illustré par JOE.

**Le Petit Fauconnier de Louis XIII**, par JULES CHANCEL.  
Roman historique à la manière d'Alexandre Dumas. Le jeune héros n'est autre que le fils de Concini.

**Le Page de Marie Stuart**, par WALTER SCOTT.  
Ce roman nous fait assister à des événements qui ont précédé la triste fin de la jolie reine d'Ecosse.

**L'Antiquaire**, par WALTER SCOTT.  
Cette adaptation, excellente, a permis de retrancher quelques digressions que la jeunesse goûte peu.

**Le dernier des Mohicans**, par F. COOPER.  
Cooper sait à merveille entraîner le lecteur, le tenir en haleine, mêler l'histoire à la fiction.

**La Case de l'Oncle Tom**, par M<sup>me</sup> BESCHER-STOWE.  
C'est l'un des livres les plus populaires, l'un de ceux qui ont le mieux dépeint les misères de l'esclavage.

## COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

*Arithmétique. Calcul mental. Système métrique.* (Cl. de 6<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup>).  
Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Arithmétique. Algèbre.* (Cl. de 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Éléments de Géométrie plane.* (Cl. de 3<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup>). Un vol. in-8°,  
br. ou cart.

*Algèbre.* (Cl. de 2<sup>e</sup> et 1<sup>re</sup>). Un vol. in-8°, br. ou cart.

### Précis de Géométrie.

I. *Géométrie plane.* (Cl. de 2<sup>e</sup>). Un vol. in-8°, br. ou cart.

II. *Géométrie dans l'espace.* (Cl. de 1<sup>re</sup>). Un vol. in-8°, br. ou cart.

III. *Compléments, Transformations, Coniques.* (Cl. de Math.).  
Un vol. br. ou cart.

*Algèbre et Cosmographie.* (Cl. de Phil.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Arithmétique.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Précis d'Algèbre.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Trigonométrie.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Géométrie Descriptive.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Mécanique.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

*Précis de Cosmographie.* (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

## PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

à l'usage de l'Enseignement secondaire

PAR

F. BRACHET

et

J. DUMARQUÉ

*Ancien élève de l'École Normale supérieure.  
Supérieur études mathématiques spéciales  
de Philosophie.*

*Ancien élève de l'École Normale supérieure.  
Agrégé de Mathématiques  
Professeur au Lycée de la Flèche.*

278 FIGURES

200 EXERCICES ET PROBLÈMES

TROISIÈME ÉDITION



PARIS

LIBRAIRIE DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1933

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES

### AVERTISSEMENT

Les éléments de géométrie entre (pages 6 à 32) précédant les éléments de géométrie descriptive (pages 33 à 83), mais la relation permet de commencer indifféremment par les uns ou par les autres.

En géométrie descriptive, on a adopté la terminologie (plan frontal de projection) conseillée par l'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire; l'expérience montre qu'il n'en résulte que des avantages, la corrélation de langage entre les deux projections étant désormais parfaite.

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Copyright by Librairie Delagrave, 1939.

1. **But.** — La géométrie descriptive a pour but de représenter les figures de l'espace au moyen de leurs projections planes, de telle manière qu'il soit possible d'effectuer exactement toutes constructions nécessaires (droites et plans perpendiculaires par exemple) et de mesurer les éléments des figures considérées.

2. **Détermination d'un point.** — C'est le problème fondamental parce que toute figure est un ensemble de points.

Pour repérer un point  $M$  de l'espace, choisissons un plan quelconque, par exemple un plan horizontal  $H$ ; soit  $m$  la projection de  $M$  sur ce plan. Si  $M$  est connu,  $m$  en résulte, mais la réciproque est fautive : si  $m$  est donné,  $M$



FIG. 1.

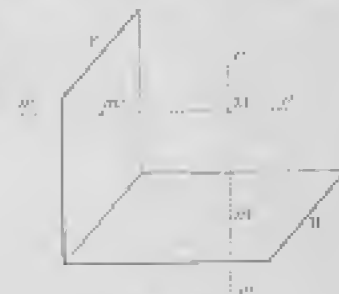


FIG. 2.

est un point quelconque de la perpendiculaire au plan  $H$  en  $m$ . Pour achever de déterminer le point  $M$ , on peut employer deux procédés :

1° On donne la valeur algébrique de la distance  $mM$  du point  $M$  au plan  $H$  (cote de  $M$ ). C'est la **Géométrie cotée** (fig. 1).

2° On choisit un deuxième plan de projection  $F$ , le plus souvent perpendiculaire au plan  $H$  et on donne la projection  $m'$  de  $M$  sur le plan  $F$  (fig. 2); le point  $M$  est déterminé par l'intersection des perpendiculaires  $mm'$  et  $mm'$  aux plans  $H$  et  $F$  en  $m$  et  $m'$ . C'est la **Géométrie descriptive à deux projections**.

L. Pour alléger le langage, nous réserverons désormais le nom de « Géométrie descriptive » à la méthode des deux projections; c'est ainsi que la désignait son inventeur, Monge (1774-1828).

# ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES EN GÉOMÉTRIE COTÉE

## LIVRE I

### LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

#### CHAPITRE I

#### LE POINT ET LA DROITE

##### § 1. — ÉPURE DU POINT. GÉNÉRALITÉS

3. Épure du point. — En géométrie cotée, un point est défini :  
1° par sa projection sur un plan horizontal (il est appelé *plan de comparaison*);

2° par sa distance au plan de comparaison, comptée positivement au-dessus de ce plan et négativement au-dessous. Ce nombre algèbre



FIG. 2.

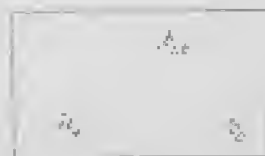


FIG. 3.

brigue s'appelle *cote* du point considéré. On l'inscrit sur l'épure à côté de la lettre qui désigne la projection du point (fig. 3 et 4). On énonce la lettre puis la cote.

On appelle *point à cote ronde* un point dont la cote est un nombre entier ( $c_1$ ).

Les points du plan de comparaison ont pour cote zéro ( $c_0$ ).

4. Échelle numérique. Échelle graphique. — La Géométrie cotée est surtout employée en Topographie; les dimensions des

objets étudiés dépassent donc le plus souvent celles de l'épure. C'est pourquoi on représente sur l'épure une *figure semblable* à la projection réelle. Le rapport de similitude, qui s'appelle *échelle numérique*, est généralement pris sous la forme  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  désignant un nombre entier simple. Ainsi, la carte d'état-major est à l'échelle  $\frac{1}{80\,000}$  de sorte qu'un segment de l'épure de  $1^m$  correspond à un segment de la projection réelle de  $1^m \times 80\,000 = 80\,000^m = 80^m$ .

5. — Pour effectuer rapidement la réduction à l'échelle des dimensions de l'objet représenté ou l'opération inverse, on utilise le plus souvent l'*échelle graphique*. On l'obtient en portant sur une droite, à partir d'une origine  $O$  et vers la droite 1, 2, 3, ... fois l'unité de longueur réduite à l'échelle. Cette unité de longueur est,

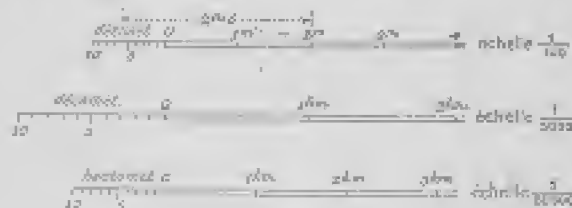


FIG. 4.

selon la grandeur de l'échelle numérique, le mètre, le décimètre, etc. (fig. 5). À gauche du point  $O$ , on porte une unité réduite divisée en dixièmes: c'est le *talon*.

On utilise l'échelle graphique comme la figure l'indique, au moyen d'une bande de papier ou d'un compas à pointes sèches. L'opération comporte une précision de l'ordre de grandeur du quart de millimètre; l'évaluation d'une longueur est donc faite :

- à  $20^m$  près si l'échelle numérique est  $1/80\,000$ ;
- à  $1^m, 25$  près — — — — — est  $1/3\,000$ .

L'échelle numérique et l'échelle graphique sont deux représentations différentes du rapport de similitude liant l'objet réel et l'objet figuré. En principe, l'une ou l'autre doivent toujours être indiquées sur l'épure<sup>1</sup>.

1. Cependant, pour alléger, nous nous bornerons souvent à représenter l'échelle graphique réduite à l'échelle. Il nous arrivera même de ne pas joindre le septième-unité à certaines épures très simples qui seront datées dans la suite.

6. Définitions. — On appelle :

traces d'une droite son point d'intersection avec le plan de comparaison (fig. 6);

traces d'un plan sa droite d'intersection avec le plan de comparaison (fig. 6).

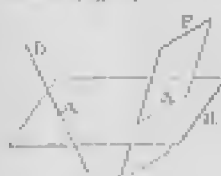


Fig. 6.

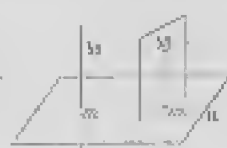


Fig. 7.



Fig. 8.

On dit qu'une droite ou un plan sont :

verticaux quand ils sont perpendiculaires au plan de comparaison (fig. 7);

horizontaux quand ils sont parallèles au plan de comparaison (fig. 8).

Tous les points d'une droite verticale se projettent sur sa trace.

Tous les points d'un plan vertical se projettent sur sa trace (G. E. 84).

Une droite horizontale ou un plan horizontal n'ont pas de traces.

7. Rabattement d'un plan vertical sur un plan horizontal.

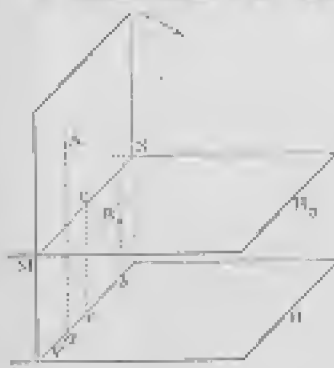


Fig. 9.



Fig. 10.

— Soit un plan vertical donné par sa trace  $V$  (fig. 9 et 10), un plan horizontal  $H_1$ , défini par sa cote  $z_1$  et leur intersection  $m_1a_1$  (line-

zontale). Si on fait tourner le plan vertical autour de la droite  $m_1a_1$  (appelée *charnière*) jusqu'à l'appliquer sur le plan  $H_1$ , on dit qu'on l'a *rabotté* sur le plan  $H_1$ .

Le point  $a_1$  du plan vertical vient se placer sur la perpendiculaire en  $a$  à la trace  $V$  (qui est la projection de  $MN$ ) à une distance  $aA$  égale à la différence des cotes du point et du plan  $H_1$ .

$$5,1 - 3 = 2,1.$$

Les points dont la cote est supérieure à 3 se placent d'un certain côté de la trace  $V$ , et les autres, de l'autre côté.

Les points de la charnière  $m_1a_1$  ne bougent pas pendant le rabattement.

Étant donné un point  $B$  du rabattement, on trouve sa projection et sa cote par l'opération inverse qui porte le mot de *relèvement*.

## § 2. — LA LIGNE DROITE. PENTE ET INTERVALLE

8. Épure de la droite. — La projection d'une droite est en général une droite (G. E. 83); il n'y a exception que pour les verticales : leur projection se réduit à un point (fig. 11).



Fig. 11.



Fig. 12.

Sur l'épure, une droite quelconque est définie par la projection cotée de deux de ses points ( $a_1b_1$ , fig. 12).

Si ces deux points ont la même cote, la droite est horizontale et réciproquement ( $c_1a_1d_1$ , fig. 12).

Si ces deux points ont la même projection, la droite est verticale et réciproquement ( $c_1f_1$ , fig. 12).

9. Définition. — On appelle *pente* d'une droite la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec le plan horizontal.

Soit une droite  $AB$  (fig. 13) sa projection  $ab$ ; désignons les cotes des points  $A$ ,  $B$  par  $\alpha = aA$ ,  $\beta = bB$ .

Mémen, dans le plan projetant AB, l'horizontale AC.

L'angle  $\varphi = \text{BAC}$  est l'angle de la droite avec le plan horizontal et on voit que

$$p = \lg \varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\beta - \alpha}{ab}$$

d'où la règle :

**10. Règle.** — La pente d'une droite est égale au quotient de la différence des cotes de deux de ses points par la distance de leurs projections.

**11. Problème fondamental.**

— Une droite est donnée par deux points  $a_1, b_1$  (fig. 14) ; trou-

ver la cote  $\alpha$  d'un point de cette droite connaissant sa projection horizontale  $m$ .

Nous supposons que la droite donnée n'est ni horizontale (réponse immédiate) ni verticale (problème indéterminé).

**1° Calcul.** — Évaluons la pente de la droite de deux manières :

$$p = \frac{\beta - \alpha}{ab} = \frac{z - \alpha}{am}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha = z + \frac{am}{ab} (\beta - z).$$

Notons que dans le calcul du rapport  $\frac{am}{ab}$ , on peut évaluer chaque terme en unités graphiques ou en centimètres.



FIG. 14.



FIG. 15.

Faire le calcul numérique sur la figure 15.

**2° Rabattement.** — Soit la droite  $a_1b_1$  (fig. 15). Rabattons son plan projetant autour de l'horizontale du point  $a_{1,2}$  ; ce

point ne bouge pas ; le point  $b_1$  vient en B sur la perpendiculaire en  $b$  à  $ab$  à la distance  $bB = \beta - \alpha = 2,5$ . Le rabattement M de  $m$  est à la rencontre de  $aB$  avec la perpendiculaire en  $m$  à  $ab$  ; on a :

$$\alpha = 2,3 + mM = 2,3 + 3,6 = 5,9.$$

**12. Remarque.** — En topographie, la différence des cotes de deux points est généralement faible par rapport à leur distance horizontale ; les erreurs de construction sont donc plus difficiles à éviter ; aussi, dans les problèmes de ce genre, on préfère le plus souvent la solution par le calcul.

**13. Exercices.** — 1. Angle d'une droite  $a_1b_1$  avec le plan horizontal (fig. 15).

On peut calculer immédiatement la tangente de cet angle, c'est-à-dire la pente de la droite :

$$\lg \varphi = p = \frac{\beta - \alpha}{ab} = \frac{5 - 2,3}{3,6} = 0,87.$$

On peut également rabattre le plan vertical projetant la droite ; l'angle  $Bab$  est l'angle  $\varphi$  cherché.

II. — Distance de deux points  $a_1b_1$  (fig. 15).

La même rabattement donne cette distance en  $aB$  ; si on préfère le calcul, le triangle rectangle  $aBb$  montre que

$$\begin{aligned} aB^2 &= (3 - 2,3)^2 + (3,6)^2 \\ aB &= 4,1. \end{aligned}$$

La formule générale serait, avec les notations du n° 9

$$d^2 = (\beta - \alpha)^2 + ab^2.$$

**14. Problème inverse.**

— Une droite est donnée par deux points  $a_{1,2}, b_{1,2}$  (fig. 16) ; trouver la projection du point de cette droite qui a une cote donnée.

Nous supposons que la droite donnée n'est ni horizontale (problème impossible ou indéterminé) ni verticale (réponse immédiate).

**1° Calcul.** — Cherchons la projection  $m$  du point de cote  $\beta$ . Évaluons la pente de la droite de deux manières :

$$p = \frac{6,6 - 3,8}{ab} = \frac{5 - 3,8}{am}$$

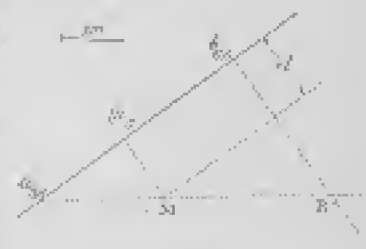


FIG. 16.



d'où

$$am = ab \frac{5 - 3,8}{6,6 - 3,8} = ab \times 0,45.$$

Si était supérieur à 3,8, on porte  $am$  à partir de  $a$  dans le sens des cotes croissantes.

2° **Rabattement.** — Le même qu'au n° 11; on trace sur ce rabattement la parallèle à  $ab$  à la distance

$$d = 5 - 3,8 = +1,2.$$

Son point de rencontre  $M$  avec  $aB$  est le rabattement du point cherché; on le relève en  $m$  au moyen de la perpendiculaire  $mM$  à  $ab$ .

**15. Exercice.** — Chercher la trace d'une droite.

C'est le point de cote zéro.

**16. Graduation d'une droite.** — On dit qu'une droite est graduée quand on connaît les points à cote ronde (fig. 17).

Les points  $a_2, b_1, c_1, \dots$  sont à l'intersection de la droite donnée avec des plans horizontaux équidistants; ils sont donc équidistants dans l'espace et par suite aussi en projection. Si on en connaît deux, les autres en résultent immédiatement.

Pour graduer une droite  $ab$  (faire la figure), on construit les projections  $a, d$  des points de cote 2 et 3, par exemple (14); on partage  $ad$  en trois parties égales et on prolonge la graduation.

**17. Définition.** — On appelle *intervalle* d'une droite la distance des projections de deux points à cote ronde consécutifs de cette droite.

$$i = ab = ba = ad. \quad (\text{fig. 17})$$

La formule du n° 9 donne

$$p = \frac{3 - 2}{ab} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{i} \quad \text{ou} \quad i = \frac{1}{p}$$

d'où la règle :

**18. Règle.** — *L'intervalle et la pente d'une droite sont deux nombres inverses l'un de l'autre.*

Ainsi, quand l'angle  $\varphi$  de la droite avec le plan horizontal est égal à  $60^\circ$ , on a

$$p = \lg \varphi = \frac{1}{3} \quad i = \cotg \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**19. Remarque.** — Il est clair que la distance  $uv$  des projections de deux points d'une droite (fig. 18) dont les cotes, sans être rondes, diffèrent de 1, est aussi égale à l'intervalle de cette droite :

$$i = \frac{1}{p} = \frac{uv}{6,3 - 5,3} = uv.$$

**20. Problème.** — *Déterminer par une construction la pente d'une droite graduée.*



FIG. 18.

FIG. 19.

FIG. 20.

On trace d'abord (fig. 19) le segment  $bb$  perpendiculaire à  $ab$  et égal à l'unité graphique; la perpendiculaire en  $B$  à  $ab$  coupe  $ab$  en un certain point  $j$ ; le triangle rectangle  $abj$  donne

$$Bb^2 = ab \cdot bj \quad \text{ou} \quad i = i \times bj.$$

La pente est égale à la mesure du segment  $bj$ .

Si cette construction est trop petite pour être précise, on opère sur 3 intervalles, par exemple (fig. 20); on prend  $ad$  égal à 3 unités graphiques et on a

$$3i \times dk = 3^2$$

d'où

$$dk = 3 \times \frac{1}{i} = 3p.$$

### § 3. — DROITES PARALLÈLES. DROITES CONCURRENTES

**Droites parallèles.**

**21.** Toutes les verticales sont parallèles entre elles.

Une horizontale étant parallèle à sa projection, pour que deux horizontales soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections le soient (fig. 21).

On a éternellement deux droites quelconques parallèles  $AB$

et CD (fig. 22). On a démontré en géométrie (G. E. 91) que leurs projections sont parallèles; d'autre part elles font des angles égaux



FIG. 21.



FIG. 22.

avec le plan horizontal et ont, par suite, des intervalles égaux; enfin le sens des cotes croissantes est le même sur AB et CD; comme cette propriété se conserve en projection, les droites ont sur l'épure des graduations de même sens.

Examinons si ces trois conditions nécessaires sont suffisantes: considérons deux droites  $a_2b_2$  et  $c_2d_2$  (fig. 23) ayant des projections parallèles, des intervalles égaux et des graduations de même sens. Les vecteurs  $ab$ ,  $cd$  étant égaux, la figure  $abcd$  est un parallélogramme; les horizontales  $a_1p_1$ ,  $b_1q_1$  ayant leurs projections parallèles, elles sont dans un même plan, lequel contient les droites données. Ces deux

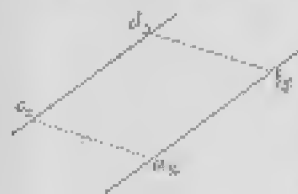


FIG. 23.

droites ne pouvant être concourantes, puisque leurs projections sont parallèles, sont elles-mêmes parallèles.

En résumé, nous avons mis en évidence l'énoncé suivant :

**22. Théorème.** — *Pour que deux droites quelconques soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles aient :*

- 1° des projections parallèles;
- 2° des intervalles égaux;
- 3° des graduations de même sens.

**23. Remarque.** — Notons la propriété qui a été utilisée dans le raisonnement précédent : si deux droites d'un même plan ont leurs projections parallèles, elles sont nécessairement parallèles.

**24. Problème.** — *Mener par un point la parallèle à une droite.*

Si la droite donnée  $a_2b_2$  est graduée (fig. 24) on mène par la projection  $m$  du point donné  $m_{1,1}$  le vecteur  $mq$  équivalent à  $ab$ ; la droite  $m_{2,2}q_{2,2}$  est la droite cherchée.

Si la droite donnée  $c_2d_2$  est définie par deux points quelconques, on mène encore par la projection du point donné  $p_1$ , le vecteur  $p_1q$  équivalent à  $cd$ ; la cote du point  $q$  est

$$1,9 + (7,9 - 3,3) = 1,9 + 4,6 = 6,5.$$

**Droites concourantes.**

**25.** — Deux droites concourantes quelconques ont leurs projections concourantes, mais cette condition nécessaire, n'est évidemment pas suffisante; résolvons le problème suivant :

**26. Problème.** — *Reconnaitre si deux droites quelconques AB et CD dont les projections sont concourantes sont elles-mêmes concourantes.*

Si le point de rencontre  $m$  des projections des deux droites  $a_2b_2$  et  $c_2d_2$  (fig. 25) est sur l'épure, on cherche sa cote  $x$  sur la pro-



FIG. 25.



FIG. 26.



FIG. 27.



FIG. 28.

mière droite et sa cote  $y$  sur la 2<sup>e</sup> droite (11); la condition nécessaire et suffisante pour que les droites soient concourantes est  $x = y$ .

Si les projections des deux droites se coupent en dehors de l'épure (fig. 26), on trace les droites  $a_1d_{2,1}$  et  $b_{1,1}c_{1,1}$  dont les projections se coupent sur l'épure; si les droites de l'un de ces deux couples sont concourantes, les quatre droites sont dans le même plan et les droites de l'autre couple sont nécessairement concourantes; on est

deux ramené à examiner, comme on vient d'apprendre à le faire, si les droites  $a_1d_{1,1}$  et  $b_1d_{1,1}$  sont concourantes.

Si les droites données sont graduées (fig. 27) on trace les horizontales  $a_1c_1$  et  $b_1d_1$  s'appuyant sur ces deux droites. Remarquons à ce sujet que les horizontales d'un plan sont parallèles comme intersections de ce plan par des plans horizontaux. Pour que les deux droites données se rencontrent, il faut et il suffit que les horizontales  $a_1c_1$  et  $b_1d_1$  soient parallèles; on est ainsi ramené à examiner si les projections *ac* et *bd* de ces deux horizontales sont parallèles.

Si les droites données  $a_1b_1$  et  $c_1d_1$  ont leurs projections confondues, (fig. 28) elles ont le même plan projetant et par suite, sont concourantes ou parallèles; le théorème n° 22 permet de voir si elles sont parallèles; si elles ne le sont pas, on cherche leur point de concours par un rabattement. Remarquons que cette construction donne également l'angle  $\alpha$  des deux droites.

27. Exercices. — I. Dire à quelle condition deux horizontales sont concourantes (faire la figure).

II. Dire à quelle condition une verticale et une droite quelconque sont concourantes (faire la figure).

III. Menr par un point donné une droite s'appuyant sur deux droites données, dont l'une est verticale (faire la figure).

## CHAPITRE II. — LE PLAN

28. Plans remarquables. — Ce sont :

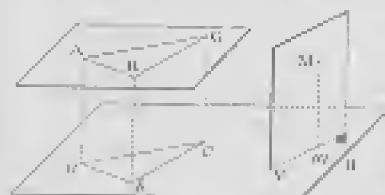


FIG. 29.

29. Représentation d'un plan quelconque. — On peut définir un plan sur une épure de la même manière qu'en géométrie :

1° Un plan horizontal; il est défini par sa cote.

Toute figure d'un plan horizontal est égale à sa projection (fig. 29).

2° Un plan vertical; il est défini par sa trace V. Pour qu'un point appartienne à un plan vertical, il faut et il suffit qu'il se projette sur la trace de ce plan (fig. 29).

- 1° par deux droites concourantes;
- 2° par une droite et un point extérieur;
- 3° par trois points non en ligne droite;
- 4° par deux droites parallèles.

Ces différents procédés se ramènent aisément les uns aux autres.

Le premier est graphiquement le plus commode.

**Droites remarquables d'un plan.**

I. — Horizontales.

30. — Toutes les horizontales d'un plan s'obtiennent en coupant par les plans horizontaux (fig. 30), par suite :

31. **Théorème.** — *Toutes les horizontales d'un plan sont parallèles entre elles et parallèles en particulier à la trace de ce plan.*

32. **Problème.** — *Déterminer l'horizontale de cote donnée d'un plan donné.*



FIG. 30.

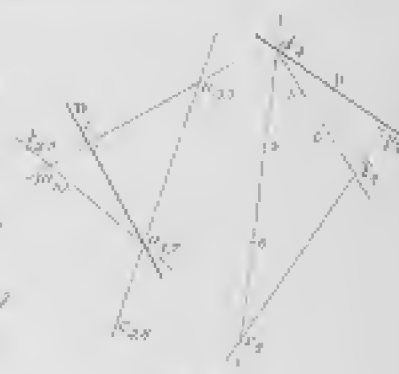


FIG. 31.

Soit le plan  $a_1b_1c_1d_1$ ; pour déterminer l'horizontale de cote 3,5, on construit sur chaque droite le point de cote 3,5 (fig. 31); la droite  $a_1c_1$  est l'horizontale cherchée.

La solution devient immédiate quand on demande une horizontale à cote donnée dans un plan défini par deux droites graduées (fig. 31).

33. **Autre interprétation.** — Le problème précédent ne diffère pas du suivant : *Construire la droite d'intersection d'un plan quelconque avec un plan horizontal.*

II. — Lignes de pente.

34. — On appelle *ligne de pente* d'un plan par rapport au plan

horizontal toute droite  $D$  de ce plan perpendiculaire à ses horizontales (fig. 30).

Les théorèmes sur la projection de l'angle droit montrent que :

Pour qu'une droite d'un plan soit ligne de pente de ce plan, il faut et il suffit que sa projection soit perpendiculaire aux projections des horizontales du plan.

On déduit aisément de cette règle la construction d'une ligne de pente  $D$  d'un plan défini par deux droites concourantes, graduées ou non (fig. 31).

**35. Représentation d'un plan par une ligne de pente.** — Rappelons la propriété fondamentale suivante :

Une ligne de pente d'un plan suffit pour définir ce plan.

En effet, si on connaît une ligne de pente  $a_1b_1$  d'un plan (fig. 32) on a immédiatement une horizontale  $a_2m_2$  de ce plan, en traçant sa projection perpendiculaire à  $a_1b_1$ .

On peut désormais définir un plan sur une équure par une de ses lignes de pente ; pour distinguer une telle droite, on la représente par un double trait ; en outre, on la suppose toujours graduée.



FIG. 32.

Rappelons, à ce sujet, que l'angle d'un plan avec le plan horizontal est égal à l'angle d'une de ses lignes de pente avec le plan horizontal (G. E. 107).

**36. Définitions.** — On appelle :

1<sup>re</sup> échelle de pente<sup>1</sup> d'un plan, une ligne de pente graduée de ce plan servant à le définir ;

2<sup>de</sup> pente et intervalle d'un plan la pente et l'intervalle de son échelle de pente.

Récapituler. — Si un plan est défini par deux droites concourantes graduées, on en déduit aisément deux horizontales puis une échelle de pente ; mais nous bornerons donc, dans les problèmes qui vont suivre, aux deux modes de représentation suivants :

plan défini par deux droites concourantes non graduées ;

— une échelle de pente.

1. Le double trait peut être regardé comme figurant les deux sommets d'une échelle ; ces deux sommets déterminent le plan et les barreaux sont portés par les horizontales du plan.

**37. Problème fondamental.** — Déterminer une droite d'un plan donné, connaissant sa projection  $D$ .

Supposons le plan défini par deux droites concourantes non graduées  $AB$  et  $AC$  (on donne les projections cotées des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ).

Si  $D$  rencontre  $ab$  et  $ac$  (fig. 33), on cherche la cote des points de rencontre  $p$ ,  $q$  (11) ;  $p_2q_2$  est la droite cherchée.



FIG. 33.



FIG. 34.



FIG. 35.

Si  $D$  rencontre  $ab$  en  $p$  et est parallèle à  $ac$  (fig. 34), on cherche la cote de  $p$  ; on pose  $pq = ac$  et on obtient le point  $q$  :

cote de  $q$  = cote de  $p$  = cote de  $c$  = cote de  $a$ .

Quand le plan est défini par son échelle de pente  $P$  (fig. 35) il suffit de tracer dans ce plan deux horizontales, de cote 7 et 8 par exemple, pour obtenir sur  $D$  les points  $p, q$ .

**38. Autre interprétation.** — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher la droite d'intersection d'un plan donné avec un plan vertical donné par sa trace  $D$ .

Nous avons vu en effet que toute figure d'un tel plan, et en particulier la droite d'intersection, se projette sur la trace de ce plan.

**39. Exercice.** — Prendre une droite dans un plan donné. On peut se donner arbitrairement la projection de la droite et on en déduit deux points cotés comme on vient de l'indiquer.

**40. Problème.** — Déterminer un point d'un plan connaissant sa projection  $m$ .

Si le plan est donné par deux droites concourantes (fig. 33 et 34), on fait passer par  $m$  une droite  $D$  considérée comme la projection d'une droite du plan ; on en détermine deux points cotés et on cherche la cote du point de cette droite ayant pour projection  $m$  (11).

Si le plan est donné par son échelle de pente (fig. 35) on utilise l'horizontale de ce plan dont la projection passe par  $a$ .

**41. Autre interprétation.** — Le problème précédent ne diffère pas du suivant : chercher le point d'intersection d'un plan donné avec une verticale donnée.

**42. Exercice.** — Prendre un point dans un plan donné. On peut se donner arbitrairement la projection du point et on cherche sa cote comme on vient de l'indiquer.

**43. Problème.** — Par un point donné d'un plan, mener dans ce plan une droite de pente donnée  $p$ .

Soit  $D$  l'échelle de pente du plan donné,  $a_{2,7}$  un point de ce plan. Supposons le problème résolu et considérons sur la droite cherchée



FIG. 36.



FIG. 37.

le point  $b_{2,7}$  dont la cote diffère de celle de  $a$  d'un certain nombre entier, 3 par exemple. Nous remarquons :

d'une part que  $b$  doit se trouver sur l'horizontale de cote 2,7 du plan donné;

d'autre part que  $ab$  est égal à 3 fois l'intervalle de la droite  $a_{2,7}b_{2,7}$

$$ab = 3i = 3 \times \frac{1}{p};$$

$b$  doit donc se trouver sur le cercle de centre  $a$  et de rayon  $3 \times \frac{1}{p}$ .

Le tracé de ces deux lieux géométriques donne le point  $b$ .

**Discussion.** — Le problème étant ramené à l'intersection d'une droite et d'un cercle, trois cas sont possibles :

1°  $ab > ab$  ou, en appelant  $P$  la pente du plan,  $\frac{3}{p} > \frac{3}{P}$  ou enfin

$$p < P \quad 2 \text{ solutions } ab, ac.$$

2°  $ab = ab$  ou  $p = P$  une solution, la ligne de pente du point donné (solution double).

3°  $ab < ab$  ou  $p > P$  aucune solution.

La condition de possibilité  $p \leq P$  était à prévoir puisque les lignes de pente d'un plan sont, parmi toutes les droites de ce plan, celles qui ont la pente maximum.

**Exercice.** — Si le plan donné est vertical (fig. 37), on remarque que  $ab = 3i$ ; on trouve ainsi immédiatement deux solutions quel que soit  $i$ .

**44. Problème.** — Par une droite donnée, faire passer un plan de pente donnée  $P$ .

Soit  $a_2b_2$  la droite donnée (fig. 38). Les horizontales du plan passant par  $a_2$  et par  $b_2$ , ont pour différences de cote 2. Les déterminent revient donc à mener par  $a$  et  $b$  deux parallèles dont la distance,

$2i = 2 \times \frac{1}{P}$ , est connue.

Le problème consiste à construire sur une hypoténuse donnée  $ab$

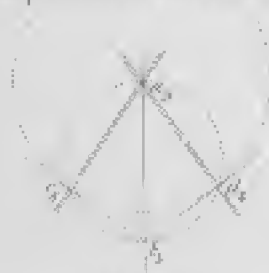


FIG. 38.



FIG. 39.

un triangle rectangle  $abc$  dont la côté  $ac = 2i$  est connu. (Intersection du cercle de diamètre  $ab$  et du cercle de centre  $a$  et de rayon  $2i$ ).

$b_{2,7}$  est une horizontale,  $a_{2,7}$  une échelle de pente du plan.

**Discussion.** — Trois cas sont possibles :

1°  $ab > ac$  ou, en appelant  $p$  la pente de la droite

$$\frac{2}{p} > \frac{2}{P} \quad \text{ou} \quad P > p;$$

2 solutions ayant pour échelles de pente  $a_{2,7}$  et  $b_{2,7}$ .

2°  $ab = ac$  ou  $P = p$  une solution, le plan ayant pour échelle de pente la droite donnée (solution double).

Or  $ab < ac$  ou  $P < p$  aucune solution.

Même remarque que dans le problème précédent sur la condition de possibilité  $P \geq p$ .

Exercice. — Que peut-on dire des traces sur le plan  $H_1$  des plans issus de  $a_1$  et ayant une pente donnée  $P$ ?

Cas particuliers. — Reprendre le problème précédent quand la droite donnée est horizontale; on trouve toujours deux solutions (fig. 32).

## LIVRE II

### FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

#### CHAPITRE I. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES

Le parallélisme de deux droites a déjà été étudié.

##### § 1. — PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

45. Problèmes. — 1. Reconnaître si une droite donnée  $D$  est parallèle à un plan donné.

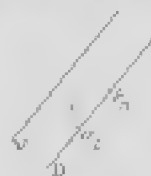


FIG. 40.

Si le plan donné est **horizontal**, il faut et il suffit que la droite  $D$  soit horizontale.

Si le plan donné est **vertical** (fig. 40) tout point de ce plan a sa projection sur la trace  $V$  du plan et réciproquement; par suite, pour que la droite  $D$  soit parallèle au plan  $P$  c'est-à-dire n'y ait aucun point il faut et il suffit que la trace  $V$  du plan donné et la projection de la droite  $D$  soient parallèles.

Dans le cas général où le plan donné est quelconque, on utilise le théorème suivant :

Pour qu'une droite  $D$  et un plan  $P$  soient parallèles, il faut et il suffit que l'intersection du plan  $P$  avec un plan contenant la droite  $D$  soit parallèle à cette droite.

On coupe le plan donné d'inclinaison  $P$  (fig. 41) par le plan vertical projetant la droite donnée  $a_1b_1$ ; on a vu (38) comment on détermine leur intersection  $a_2b_2$ ; il reste à examiner si les droites  $a_1b_1$  et  $a_2b_2$  sont parallèles.

II. — Mener par une droite  $a_1b_1$ , le plan parallèle à une droite  $m_1n_1$  (fig. 42).



FIG. 41.



FIG. 42.



FIG. 43.

Ce plan est défini par la droite donnée et par la parallèle  $b_1a_2c_1$  à  $m_1n_1$ .

III. — Mener par un point  $a_1c_1$  le plan parallèle à deux droites données  $m_1n_1$  et  $p_1q_1$  (fig. 43).

Ce plan est défini par les parallèles  $a_1c_1b_1c_2$  et  $a_1c_1d_1c_2$  aux deux droites données.

##### § 2. — PLANS PARALLÈLES

46. — Rappelons les deux théorèmes suivants :

1. — Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.

II. — Deux plans sont définis chacun par deux droites concourantes; si ces droites sont parallèles entre elles deux à deux, les deux plans sont parallèles.

47. — Avant d'aborder le cas général, remarquons tout d'abord que :

1° deux plans horizontaux sont toujours parallèles;

2° la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans verticaux soient parallèles est que leurs traces le soient.

48. — Considérons maintenant deux plans quelconques parallèles  $P$  et  $Q$  (fig. 44). Leurs traces  $AB$  et  $CD$  sont parallèles (46-1). Coupons

les deux plans par un plan vertical de trace  $V$  perpendiculaire à  $AB$  et  $CD$ ; les intersections obtenues  $EF$ ,  $GK$  sont respectivement des lignes de pente pour les plans  $P$  et  $Q$  et elles sont parallèles (46-I). Si on appelle  $G'K'$  une autre ligne de pente du  $Q$ , elle est parallèle à  $GK$  et par suite aussi à  $EF$ . En résumé, si deux plans sont parallèles, leurs échelles de pente sont nécessairement parallèles.

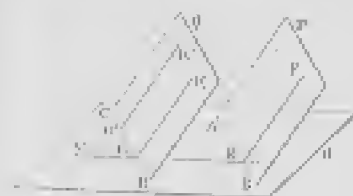


FIG. 44.

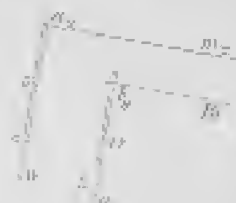


FIG. 45.

Inversement, considérons deux plans dont les échelles de pente  $D, D'$  sont parallèles (fig. 45); traçons une horizontale de chacun plan;  $a_2m_2$  et  $b_2p_2$ ; elles sont parallèles en projection et par suite aussi dans l'espace (21). Les deux plans donnés étant définis chacun par deux droites concurrentes  $D$  et  $m_2p_2$ ,  $\Delta$  et  $b_2p_2$ , deux à deux parallèles entre elles, sont parallèles (46-II).

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant :

**49. Théorème.** — *Pour que deux plans quelconques soient parallèles, il faut et il suffit que leurs échelles de pente soient parallèles.*

**50. Problème.** — *Mener par un point A le plan parallèle à un plan défini par son échelle de pente B (fig. 46).*



FIG. 46.

On pourrait mener par  $a_2$  l'échelle de pente parallèle à  $B$  mais il convient de placer les échelles de pente en dehors des ébauches pour ne pas encombrer la partie centrale; on trace donc d'abord l'horizontale  $a_2m_2$  du plan cherché, laquelle est perpendiculaire à  $B$ , puis on mène par le point  $m_2$  l'échelle de pente  $\Delta$  parallèle à  $B$ .

## CHAPITRE II. — INTERSECTIONS DE DROITES ET DE PLANS

### 1. — INTERSECTION DE DEUX PLANS

**51. Cas particulier.** — *L'un des plans est horizontal ou vertical.*  
Ces deux problèmes ne diffèrent pas :

1<sup>o</sup> de la recherche de l'horizontale de pente donnée du deuxième plan donné (32).

2<sup>o</sup> de la détermination d'une droite du deuxième plan donné connaissant la projection de cette droite (38).

**52. — Cas général.**

**Méthode.** — Pour chercher l'intersection de deux plans quelconques  $P$  et  $Q$ , on les coupe par un plan auxiliaire  $R$  (fig. 47); on détermine les intersections  $AB$  et  $CD$  du plan  $R$  avec les plans  $P$  et  $Q$ , puis on marque le point  $M$  commun à ces deux droites; c'est un premier point de l'intersection. On en construit un deuxième  $N$  au



FIG. 47.



FIG. 48.

moyen d'un autre plan auxiliaire. La droite  $MN$  est l'intersection cherchée.

On choisit le plus souvent comme plan auxiliaire un plan horizontal, de manière à savoir déterminer les intersections auxiliaires  $AB$  et  $CD$ . On peut également prendre, le cas échéant, un plan vertical (38).

**53. — Remarque.** — Si un plan auxiliaire donne deux droites  $AB$  et  $CD$  parallèles (fig. 48), leur point commun  $M$  n'existe plus, mais il est remplacé par un enseignement équivalent : l'intersection

EF est parallèle à AB ou CD (G. E. n° 13). Un autre plan auxiliaire, non parallèle à R, donnera un point M de cette intersection.

**Épure d'intersections de plans.**

**54. Cas général.** — Pour obtenir l'intersection de deux plans définis par leurs échelles de pente D,  $\Delta$  (fig. 50), on les a coupés par les plans horizontaux de cote 2 et 4; on a ainsi l'intersection  $a_1b_1$ .

**Cas particulier.** — Les échelles de pente D,  $\Delta$  ont leurs projections parallèles.

**55. 1<sup>re</sup> méthode** (fig. 50). — Les horizontales des deux plans étant parallèles, leur intersection est une horizontale dont il suffit de



FIG. 50.

FIG. 51.

FIG. 52.

déterminer un point. On l'obtient à l'aide d'un plan auxiliaire vertical V perpendiculaire aux horizontales des deux plans; on rabat ce plan V sur le plan horizontal de cote 1 pour construire le point  $a_{11}$  commun aux deux droites d'intersection. Remarquons que  $m, a_{11}, p$  est un rectiligne de l'un des dièdres formés par les deux plans; sa vraie grandeur est  $m\beta p$ .

**56. 2<sup>e</sup> méthode** (fig. 51). — L'intersection est une horizontale s'appuyant sur les deux échelles de pente D,  $\Delta$ . Considérons deux quelconques de ces horizontales, l'une fixe  $a_1c_1$ , l'autre variable  $a_2c_2$ ; les segments de l'espèce AU et CV sont proportionnels puisqu'ils sont interceptés sur deux droites par deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile; cette propriété se conserve en projection; les segments  $au$  et  $cv$  étant proportionnels, toutes les droites  $uv$  sont concourantes; considérons en particulier  $a_1c_1$  et  $b_1d_1$ , dont les projections se coupent en  $m$ ; la projection  $pq$  de l'intersection des deux plans passe par  $m$

et elle est perpendiculaire à D et  $\Delta$ . On détermine ensuite la cote de  $pq$  sur D ou sur  $\Delta$  (sur la figure, c'est 1,1).

Cette méthode est artificielle, mais elle est graphiquement plus simple que la précédente. Elle sera souvent employée dans la suite.

## § 2. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

**57.** — Nous avons déjà traité les cas particuliers suivants :

1<sup>o</sup> Le plan est horizontal (14).

2<sup>o</sup> Le plan est vertical: on a immédiatement la projection  $mn$  du point commun et on est ramené au problème du n° 11.

3<sup>o</sup> la droite est verticale (31).

**58.** — Dans le cas général, on fait passer par la droite donnée D un plan auxiliaire B (fig. 53) et on détermine son intersection AB avec le plan donné P; elle rencontre la droite D au point cherché M.

Le plan auxiliaire sera le plus souvent un plan quelconque passant par la droite, défini par une horizontale de direction arbitraire.



FIG. 53.

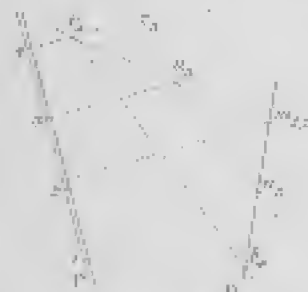


FIG. 53.

FIG. 54.

**59. 1<sup>re</sup> épure.** — Soit le plan d'échelle de pente P et la droite donnée D (fig. 53). Le plan auxiliaire, défini par l'horizontale  $a_1c_1$ , coupe le plan P suivant la droite  $a_2c_2$ , laquelle rencontre D au point  $m_{11}$  cherché.



60. 2<sup>e</sup> épure. — Dans le cas particulier où la droite donnée  $D$  est parallèle, en projection, à l'échelle de pente du plan (fig. 54), on peut prendre pour plan auxiliaire celui qui a  $D$  pour échelle de pente. On termine comme au n° 56.

Applications.

61. 1. Intersection de trois plans  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  (fig. 55). — On cherche

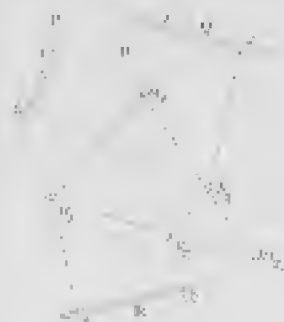


FIG. 55.



FIG. 56.

la droite  $D$  d'intersection de deux de ces plans,  $P$  et  $Q$  par exemple, puis le point  $M$  d'intersection de la droite  $D$  avec le 3<sup>e</sup> plan donné;  $M$  est le point commun aux trois plans.

62. II. — Problèmes de construction de droites.

1<sup>o</sup> Construire une droite issue d'un point  $a_{12}$ , s'appuyant sur deux droites  $D$ ,  $\Delta$  (fig. 56).

On cherche le point  $p_{12}$  d'intersection du plan  $\Delta$  avec la droite  $D$ . La droite cherchée est  $a_{12}p_{12}$ . On vérifie qu'elle est concourante avec  $D$  (chercher la cote de  $a_{12}$ ).

2<sup>o</sup>. — Mener par un point  $a_{12}$  une droite parallèle à un plan  $P$  et rencontrant une droite  $D$  (fig. 57).

Le plan  $Q$ , passant par  $a_{12}$  et parallèle au plan  $P$  coupe la droite  $D$  au point  $a_{12}p_{12}$ . La droite cherchée est  $a_{12}a_{12}p_{12}$ .

3<sup>o</sup>. — Mener parallèlement à une direction donnée  $D$



FIG. 57.

une droite s'appuyant sur deux droites données  $A$  et  $B$ .

Le plan  $P$  mené par  $A$  parallèlement à  $B$  coupe  $B$  en un point  $M$ ; la parallèle issue de  $M$  à  $D$  est la droite cherchée. On vérifie qu'elle est concourante avec  $A$ . (Faire l'épure.)

## CHAPITRE III. — DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

63. — Pour qu'une droite soit perpendiculaire :

1<sup>o</sup> à un plan horizontal, il faut et il suffit qu'elle soit verticale ;

2<sup>o</sup> à un plan vertical, il faut et il suffit qu'elle soit horizontale et perpendiculaire en projection à la trace du plan.

64. — Considérons maintenant un plan quelconque  $P$  et la droite  $AB$  qui lui est perpendiculaire (fig. 58).

Le plan vertical  $A\alpha\beta$  projetant cette droite, étant perpendiculaire au plan  $P$  et au plan  $H$ , l'est aussi à la trace  $GT$  du plan  $P$ ; par suite, son intersection  $AG$  avec le plan  $P$  est une ligne de pente dont la projection est confondue avec celle de  $AB$ . Une perpendiculaire à un plan est donc, en projection, parallèle aux lignes de pente de ce plan.



FIG. 58.



FIG. 59.

D'autre part, dans le triangle rectangle  $ABC$ , les angles  $B$  et  $C$  de la droite  $AB$  et du plan  $P$  avec le plan  $H$  sont complémentaires; les tangentes de ces angles, c'est-à-dire les pentes de la droite  $AB$  et du plan  $P$ , sont inverses l'une de l'autre et il en est de même pour les interelles.

Enfin, soit les projections de la droite  $AB$  et de la ligne de pente

AC les notes croissent de B vers  $\alpha$  et de C vers  $\alpha$ ; c'est-à-dire en sens contraire.

65. — Examinons si ces trois conditions sont suffisantes; supposons que la droite D et l'échelle de pente E d'un plan P (fig. 59) aient leurs projections parallèles, leurs intervalles inverses et leurs graduations de sens contraire.

Considérons une droite  $m_1p_1$  perpendiculaire au plan P; elle satisfait nécessairement aux trois conditions précédentes; par suite, les droites D et  $m_1p_1$  ont leurs projections parallèles (chacune est parallèle à E), leurs intervalles égaux (chacun est l'inverse de celui de E) et leurs graduations de même sens (chacune a le sens contraire de celle de E). La droite D est donc parallèle à  $m_1p_1$ , c'est-à-dire perpendiculaire au plan P.

En résumé, nous aboutissons au théorème suivant :

66. **Théorème.** — *Pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires, il faut et il suffit que cette droite et l'échelle de pente du plan aient :*

- 1° leurs projections parallèles;
- 2° leurs intervalles inverses l'un de l'autre;
- 3° leurs graduations de sens contraires.

67. 1<sup>er</sup> Problème. — *Mener par un point  $a_{12}$  la perpendiculaire à un plan donné P; chercher son pied (\*)* (fig. 60).



Fig. 60.

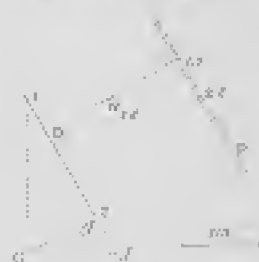


Fig. 61.

On construit d'abord l'inverse de l'intervalle de l'échelle de pente P (30); on en déduit la perpendiculaire  $a_{12}b_{12}$ ; on obtient son pied  $b_{12}$  comme au n° 60.

Si on veut la longueur du segment  $a_{12}b_{12}$ , on opère comme il a été dit au n° 13-II (escalier ou rabattement).

III Ou : projeter un point sur un plan.

REMARQUE. — Si le plan P est vertical (faire l'épure), on a immédiatement la perpendiculaire (qui est horizontale) et son pied; la distance du point au plan est portée en vraie grandeur.

68. 2<sup>o</sup> Problème. — *Mener par un point  $a_{12}$  le plan perpendiculaire à une droite D; chercher son pied (\*)* (fig. 61.)

Même méthode que dans le 1<sup>er</sup> problème.

REMARQUE. — Si la droite D est horizontale (faire l'épure), on a immédiatement le plan perpendiculaire (qui est vertical) et son pied.

69. 3<sup>o</sup> Problème. — *Mener par un point la perpendiculaire à une droite; chercher son pied.*

(On construit le plan issu du point A et perpendiculaire à la droite, puis on cherche son pied I; la perpendiculaire cherchée est AI (faire l'épure).

Pour obtenir la distance du point à la droite, on opère encore par calcul ou rabattement.

70. 4<sup>o</sup> Problème. — *Perpendiculaire commune à deux droites D,  $\Delta$ .* Dans le cas général, la méthode est la suivante :



Fig. 62.

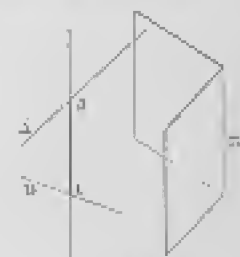


Fig. 63.

1° On cherche la direction de la perpendiculaire commune; c'est la perpendiculaire  $\pi$  au plan mené par l'une des droites données parallèlement à l'autre (fig. 62) ou encore, si le tracé est plus commode, c'est l'intersection  $\pi$  de deux plans respectivement perpendiculaires aux deux droites données (fig. 63).

2° On construit la droite JJ parallèle à  $\pi$  s'appuyant sur D et  $\Delta$  (12-3°).

(1) Ou : projeter un point sur une droite.

Nous nous bornons à faire l'épure dans les deux cas particuliers suivants où le tracé se simplifie.

**1<sup>er</sup> Cas.** — L'une des droites  $D$  est verticale (fig. 64).

La droite cherchée est une horizontale dont la projection passe par le point  $D$  et est perpendiculaire à la projection de  $\Delta$ ; on peut tracer sa projection ( $i$ ); on achève en déterminant la cote du point  $i$  sur  $\Delta$ .

La plus courte distance des deux droites est égale au segment ( $i$ ).



FIG. 64.



FIG. 65.

**2<sup>e</sup> Cas.** — Les deux droites  $D$ ,  $\Delta$  sont horizontales (fig. 65).

La perpendiculaire commune est verticale; sa projection est réduite à un point, lequel se trouve nécessairement à la rencontre des projections  $D$ ,  $\Delta$ .

La plus courte distance des deux horizontales données est égale à la différence de leurs cotes.

**71. Exercices.** — Perpendiculaire commune à deux droites dont les projections sont parallèles.

Montrer que c'est l'intersection des plans ayant les droites données pour échelles de pente (faire l'épure).

# ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES PAR LA MÉTHODE DES DEUX PROJECTIONS

## LIVRE I

### LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

#### CHAPITRE I. — LE POINT

##### I. 1. — PLANS DE PROJECTIONS. ÉPURE DU POINT

**72.** — Soit deux plans perpendiculaires, l'un horizontal appelé plan horizontal de projection, l'autre vertical appelé plan frontal (<sup>1</sup>) de projection (fig. 66), et  $xy$  leur intersection. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace,  $m$  et  $m'$  ses projections sur les plans  $H$  et  $V$ ; le

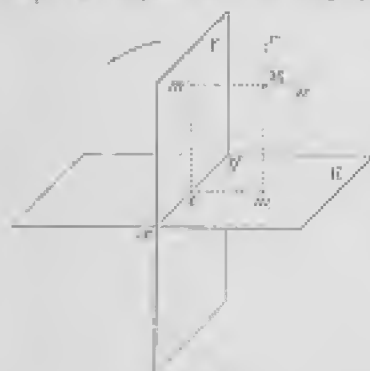


FIG. 66.

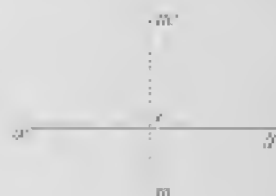


FIG. 67.

plan  $mMm'$ , défini par deux droites respectivement perpendiculaires aux plans  $H$  et  $V$ , est perpendiculaire à chacun de ces plans; il l'est

<sup>1</sup> Terme adopté par l'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire.

aussi à leur intersection  $xy$  et les coupe suivant les droites  $im$ ,  $im'$  perpendiculaires à  $xy$ . L'angle rectiligne  $mim'$  est droit et le quadrilatère  $Mimim'$  est un rectangle.

Rabattons le plan  $P$  sur le plan  $H$  dans un sens qui sera précisé plus loin. La figure plane ainsi obtenue s'appelle *épure du point M* (fig. 67); sur l'épure, les droites  $im$ ,  $im'$  perpendiculaires à  $xy$  au même point sont confondues.

Toute droite d'une épure perpendiculaire à  $xy$  s'appelle *ligne de rappel*.

73. — Inversement, prenons sur une épure deux points  $m$ ,  $m'$  situés sur une même ligne de rappel, plions cette épure le long de  $xy$  de manière à reconstituer le dièdre droit  $HxyP$ , et examinons si les perpendiculaires  $moe$  au plan  $H$  et  $m'o'$  au plan  $P$  sont concourantes. Les droites  $im$ ,  $im'$  perpendiculaires à  $xy$  définissent un plan perpendiculaire à  $xy$ . Ce plan est donc perpendiculaire au plan  $H$  et au plan  $P$  et il contient les droites  $moe$ ,  $m'o'$  perpendiculaires à chacun de ces plans. Ces deux droites sont ainsi dans le même plan et ne peuvent pas être parallèles, sinon les plans  $H$  et  $P$  le seraient; elles se coupent donc en un point  $M$  défini sur l'épure par ses projections  $m$ ,  $m'$ .

En résumé, on aboutit au théorème suivant :

74. **Théorème.** — *Pour que deux points  $m$ ,  $m'$  d'une épure soient les projections d'un point  $M$  de l'espace, il faut et il suffit qu'ils soient sur la même ligne de rappel.*

## § 2. — DÉFINITIONS

75. — La droite  $xy$  s'appelle *ligne de terre*. La position des lettres une fois choisie ne devra plus être changée.

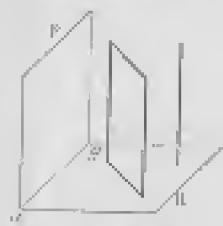


FIG. 68.  
Droite et plan  
verticaux.



FIG. 69.  
Droite et plan  
de bout.



FIG. 70.  
Droite et plan  
de profil.

76. — Une droite ou un plan perpendiculaires :

au plan horizontal de projection sont dits *verticaux* (fig. 68)

au plan frontal de projection sont dits *de bout* (fig. 69)

à  $xy$  sont dits *de profil* (fig. 70).

Ainsi, sur la figure 66, la droite  $Mm$  est une droite verticale;

—  $Mm'$  — de bout;

le plan  $Mm'm'$  est un plan de profil.

77. — Le point d'intersection d'une droite  $D$  et d'un plan de projection, ou la droite d'intersection d'un plan  $P$  et d'un plan de projection, s'appellent *traces* de cette droite  $D$  ou de ce plan  $P$ .

Ainsi, sur la figure 66 :

le point  $m$  est la trace horizontale de la verticale de  $M$ ;

le point  $m'$  est la trace frontale de la droite de bout de  $M$ ;

la droite  $im$  est la trace horizontale du plan  $Mm'm'$ ;

la droite  $im'$  est la trace frontale du plan  $Mm'm'$ .

78. — Tout point d'un plan vertical a sa projection horizontale sur la trace horizontale du plan (GE, 84).

Tout point d'un plan de bout a sa projection frontale sur la trace frontale du plan (GE, 84).

79. **Dièdres de projection.** — Le plan  $P$  partage l'espace en deux régions appelées, l'une *région supérieure*, l'autre *région*

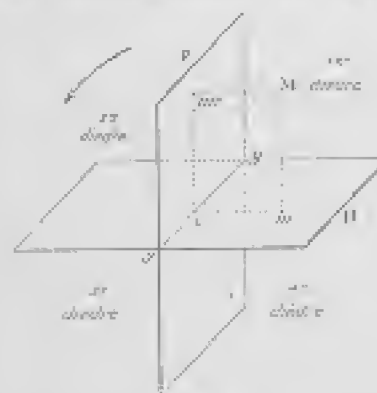


FIG. 71.



FIG. 72.

inférieure. Le plan  $P$  partage l'espace en deux régions; on appelle *région en avant* du plan  $P$  la région dans laquelle doit se placer un observateur debout sur le plan  $H$  et regardant le plan  $P$  pour avoir à

à sa gauche,  $y$  à sa droite; l'autre région est dite **en arrière** du plan F. Les quatre dièdres formés sont numérotés comme la figure 74 l'indique.

Le 1<sup>er</sup> est au-dessus de H, en avant de F.

Le 2<sup>e</sup> — de H, en arrière de F.

Le 3<sup>e</sup> est au-dessous de H, en arrière de F.

Le 4<sup>e</sup> — de H, en avant de F.

80. — **Sens du rabattement du plan F sur le plan H.**

C'est celui qui amène la partie supérieure du plan F sur la partie arrière du plan H. Tout se passe comme si l'observateur avançait vers le plan F et poussait devant lui ce plan de manière à le rabattre sur le plan H.

81. — **Cote et éloignement.**

I. — On appelle **cote** d'un point M le nombre algébrique ayant :

1<sup>o</sup> Pour valeur absolue la distance  $mM$  du point au plan horizontal.

2<sup>o</sup> Pour signe : + si M est au-dessus du plan horizontal,  
— s'il est au-dessous.

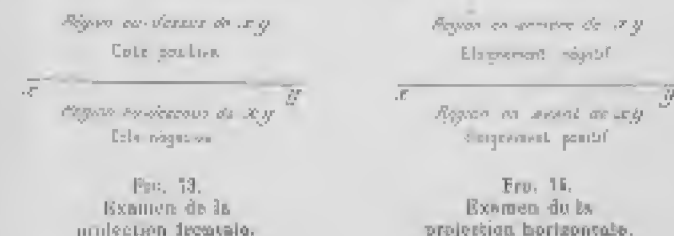
II. — On appelle **éloignement** d'un point M, le nombre algébrique ayant :

1<sup>o</sup> pour valeur absolue la distance  $m'M$  du point au plan frontal;

2<sup>o</sup> pour signe : + si le point M est en avant du plan frontal,  
— s'il est en arrière.

Pour retrouver ces grandeurs sur l'épure, remarquons d'abord que  $mMm'$  est un rectangle de sorte que

$$mM = m'm' \quad m'M = m'm.$$



Rappelons ensuite que l'épure provient de la superposition des plans H et F.

Si on y considère séparément le plan F (en supposant, pour plus de commodité, l'épure placée verticalement) et le plan H (ou supposant, pour plus de commodité, l'épure placée horizontalement), la cote  $im'$  et l'éloignement  $im$  sont comptés comme l'indiquent les figures 73 et 74.

### § 3. — ÉPURE DU POINT DANS SES DIFFÉRENTES POSITIONS

82. I. **Épure d'un point de chaque dièdre.** — La figure 75 montre les points A, B, C, D respectivement placés

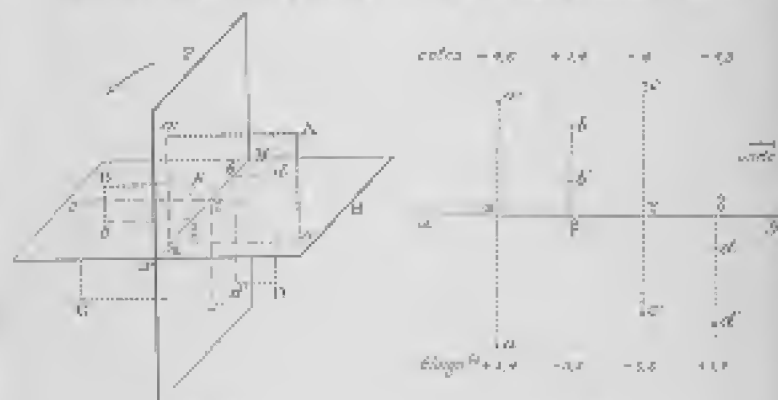


FIG. 75.

FIG. 75.

dans le 1<sup>er</sup>, le 2<sup>e</sup>, le 3<sup>e</sup> et le 4<sup>e</sup> dièdres. On en déduit aisément les épreuves correspondantes (fig. 76); les cotes se lisent sur la projection frontale; les éloignements, sur la projection horizontale.

83. II. **Épreuves des points situés dans les plans de projection.** — C'est un cas particulier du précédent. La figure 77 montre les positions des points E, G, K, L dans l'espace. Les épreuves correspondantes sont sur la figure 78.

**Règle.** — Pour qu'un point appartienne au plan horizontal de projection, il faut et il suffit que sa projection frontale soit sur  $xy$  | au plan frontal de projection, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit sur  $xy$ .

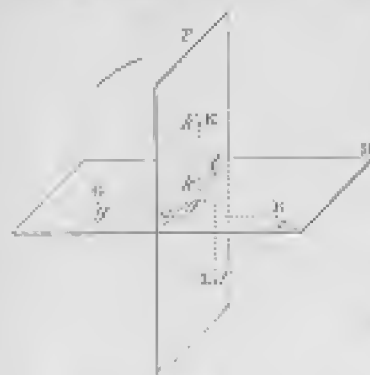


FIG. 71.



FIG. 72.

**84. III. Épure des points des bissecteurs des dièdres.** — C'est un cas particulier du 1<sup>er</sup> cas. Il suffit d'imaginer que, sur la

figure 74, chacun des points A, B, C, D a une cote et un éloignement égaux en valeur absolue. Les épures correspondantes sont sur la figure 79.

On appelle :

**premier bissecteur** le bissecteur des 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> dièdres;

**deuxième bissecteur** le bissecteur des 2<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> dièdres.

**Règle :** Pour qu'un point soit :

1<sup>o</sup> dans le 1<sup>er</sup> bissecteur, il

faut et il suffit que ses projections soient symétriques par rapport à  $xy$ .

2<sup>o</sup> dans le 2<sup>e</sup> bissecteur, il faut et il suffit que ses projections soient confondues.



FIG. 79.

**85. Exercices.** — 1<sup>o</sup> Prendre sur l'épure un point arbitraire; mesurer sa cote, son éloignement et indiquer (sans faire la figure du l'épure) sa position par rapport aux plans de projection.

2<sup>o</sup> Construire les projections d'un point dont on donne la cote, l'éloignement et la ligne de rappel.

3<sup>o</sup> Construire la projection frontale d'un point dont on donne la projection horizontale et la cote.

**86. Coordonnées graphiques d'un point.** — Lorsqu'on donne l'éloignement et la cote d'un point  $aa'$ , sa position est déterminée si on connaît le pôle  $a$  de son plan de profil. Choisissons sur  $xy$  une origine  $O$  et un sens positif, de  $x$  vers  $y$  par exemple. Le point  $a$  sera défini par son abscisse  $\overline{Oa}$ , qu'on appelle aussi abscisse du point considéré  $aa'$ .

Les coordonnées graphiques du point  $aa'$  sont :

son abscisse  $\overline{Oa}$ ; son éloignement  $\overline{aa'}$ ; sa cote  $\overline{aa'}$ .



FIG. 80.

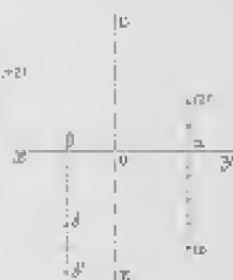


FIG. 81.

Sur la figure 80 et sur l'épure correspondante 81, on a représenté un point A ayant pour coordonnées  $+3, +4, +2$ .

— B — — — — —  $-2, +3, -5$ .

Les axes de coordonnées correspondants sont  $Ox, Oy, Oz$ ; (ces deux derniers axes sont portés par les traces du plan de profil du point  $O$ ).

## § 4. — CHANGEMENT DE PLAN FRONTAL

87. — Pour mieux connaître la forme d'un objet, il est souvent commode d'en construire une 2<sup>e</sup> projection frontale.

Soit  $F_1$  le nouveau plan frontal (fig. 82), défini sur l'épure par sa trace horizontale  $x_1y_1$  qui est aussi la ligne de terre de la nouvelle épure (fig. 83).

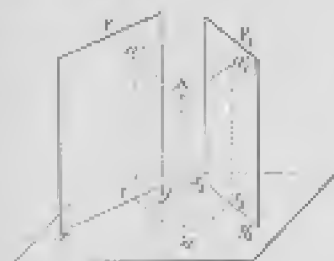


FIG. 82.



FIG. 83.

Considérons les projections  $a, a'$  d'un point  $A$  dans l'épure initiale (ligne de terre  $xy$ ), et cherchons les projections de ce point dans la nouvelle épure (ligne de terre  $x_1y_1$ ). Puisque le plan horizontal reste invariable :

- 1<sup>o</sup> la projection horizontale de  $A$  ne change pas; c'est encore  $a$ ;
- 2<sup>o</sup> la cote de  $A$  ne change pas; c'est encore  $aA$  ou  $a'a_1$ .

On est ramené à un problème déjà étudié : construire la projection frontale  $a'$  d'un point  $A$  connaissant sa projection horizontale  $a$  et sa cote  $a'a_1$ .

Il convient de veiller à ce que les vecteurs  $\vec{aa'}$ ,  $\vec{a_1a'}$  soient respectivement de même sens par rapport à  $xy$  et  $x_1y_1$  : tous deux au-dessus ou tous deux au-dessous (ces orientations étant prises en plaçant  $x$  ou  $x_1$  à gauche,  $y$  ou  $y_1$  à droite).

88. Exercices. — Les plans de projection et leurs bissecteurs forment 4 dièdres d'un demi-droit; un point étant donné par ses projections, tracer sa position par rapport à ces dièdres.

Prendons comme nouveau plan frontal  $x_1y_1$  un plan de profil; il coupe le rectangle de tous ses dièdres; nous les désignons en les désignant par 1, 2, 2', 3'.

La figure 84 montre que :

le point  $aa'$  (ou  $aa_1'$ ) est dans le dièdre 1;

le point  $bb'$  (ou  $bb_1'$ ) est dans le dièdre 2'.

89. — Un point  $A$  tourne uniformément autour de  $xy$  en même temps que son plan de profil se déplace uniformément dans le sens  $xy$ . Construire quelques projections de ce point.



FIG. 84.

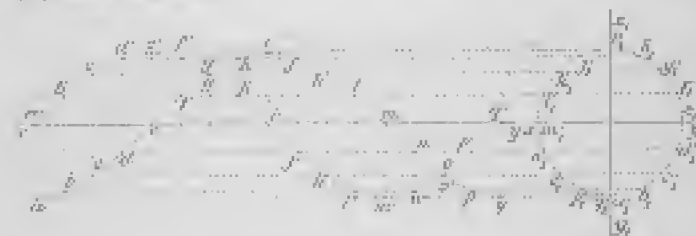


FIG. 85.

appliquer la même méthode que dans l'épure précédente; on retrouve (fig. 85), se succédant d'une manière continue, toute les formes particulières d'épure du point signalées antérieurement.

1. On démontre aisément que chaque projection décrit une sinusoïde. Dans l'espace, le point  $M$  décrit une hélice.

## CHAPITRE II. — LA DROITE

§ 1. — DÉTERMINATION D'UNE DROITE  
SUR UNE ÉPURE

90. — On a démontré en géométrie (GE. 89) que :

*La projection d'une droite sur un plan est en général une droite; il y a exception pour les droites perpendiculaires au plan : leur projection est réduite à un point.*

91. — Plans projectants et projections d'une droite.

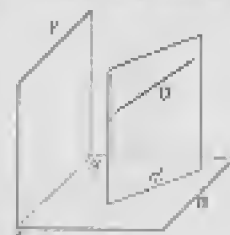


FIG. 86.



FIG. 87.

Par une droite donnée D, il passe en général :

Un plan vertical et un seul qui est le lieu des verticales projetant les points de la droite sur le plan horizontal (fig. 86) : la trace horizontale  $d$  de ce plan est la projection horizontale de la droite donnée D.

Il n'y a exception que quand cette droite est elle-même verticale (fig. 88) : tous les plans qui la contiennent sont verticaux ; sa projection horizontale se réduit à un point.

Un plan de bout et un seul qui est le lieu des droites de bout projetant les points de la droite sur le point frontal  $d'$  de ce plan est la projection frontale de la droite donnée D.

Il n'y a exception que quand cette droite est elle-même de bout (fig. 89) : tous les plans qui la contiennent sont de bout ; sa projection frontale se réduit à un point.

Étudions d'abord ces deux cas d'exception, de manière à faciliter les discussions algébriques.



FIG. 88.



FIG. 89.

92. Cas particulier. — Droite perpendiculaire à un plan de projection.

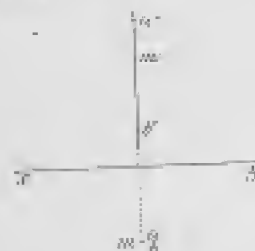


FIG. 90.

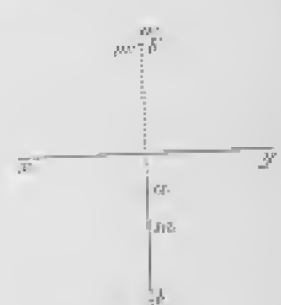


FIG. 91.

Soit  $aa'$ ,  $bb'$  deux points d'une verticale (fig. 90) ; nous voyons que :

1° la projection horizontale  $ab$  d'une verticale est réduite à un point ;

2° la projection frontale  $a'b'$  d'une verticale est perpendiculaire à  $xy$  ;

3° pour qu'un point  $mm'$

Soit  $aa'$ ,  $bb'$  deux points d'une droite de bout (fig. 91) ; nous voyons que :

1° la projection frontale  $a'b'$  d'une droite de bout est réduite à un point ;

2° la projection horizontale  $ab$  d'une droite de bout est perpendiculaire à  $xy$  ;

3° pour qu'un point  $mm'$



appartienne à une verticale  $ab$  et il faut et il suffit que  $m$  soit au point  $ab$ .

Le plan projetant une verticale :

1° sur le plan frontal est de profil ;

2° sur le plan horizontal est indéterminé.

appartienne à une droite de bout, il faut et il suffit que  $m'$  soit au point  $a'b'$ .

Le plan projetant une droite de bout :

1° sur le plan horizontal est de profil ;

2° sur le plan frontal est indéterminé.

**93. — Détermination d'une droite quelconque par ses deux projections.**

Nous supposons que la droite donnée n'est perpendiculaire à aucun plan de projection ou, ce qui revient au même, que ses deux projections sont des droites (fig. 92 et 93).



FIG. 92.



FIG. 93.

Chaque projection  $d$ ,  $d'$  définit un plan projetant et l'intersection de ces plans donne la droite  $D$  correspondante.

**Discussion.** — Il n'y a exception que si les deux plans projetants sont parallèles ou confondus. Ils ne peuvent pas être parallèles puisqu'ils ont en commun la droite  $D$ . Chacun d'eux étant perpendiculaire à l'un des plans de projection, ils ne peuvent être confondus que s'ils sont perpendiculaires à  $xy$ , autrement dit de profil. Le cas d'exception est donc celui d'une droite de profil (droite orthogonale à  $xy$ ). On aboutit ainsi à l'énoncé suivant :

**94. Théorème.** — Une droite est en général définie par ses deux projections.

Il y a exception pour les droites de profil qui doivent être définies au moyen de deux points (fig. 94).



FIG. 94.

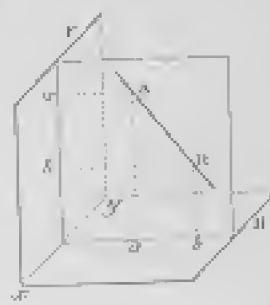


FIG. 95.

**95.** — Si nous laissons de côté les cas particuliers déjà étudiés des verticales et des droites de bout, lesquelles sont également de profil, nous retiendrons de la discussion précédente que :

1° les deux plans projetant une droite de profil sont confondus en un même plan de profil (fig. 95) ;

2° les deux projections d'une droite de profil sont perpendiculaires à  $xy$  au même point (fig. 94).

**96. — Exercice.** — L'une des projections d'une droite est perpendiculaire à  $xy$  ; que peut-on dire :

- 1° de ses plans projetants ?
- 2° de l'autre projection ?
- 3° de la droite dans l'espace ?

**97. Changement de plan frontal pour une droite.** — Il s'effectue en appliquant aux deux points qui définissent la droite les deux principes déjà énoncés :

1° les projections horizontales ne changent pas ;

2° les cotes ne changent pas (fig. 96).

**98. Problème.** — Une droite est définie par deux points  $aa'$ ,  $bb'$  ; on donne l'une des projections d'un point  $mm'$  de cette droite ; trouver l'autre projection.

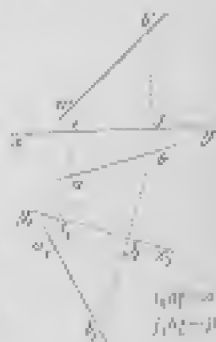


FIG. 96.

Rappelons d'abord que ce problème est indéterminé si on donne la projection horizontale d'un point d'une verticale ou la projection frontale d'un point d'une droite de bout.



FIG. 97.



FIG. 98.

**1<sup>re</sup> épure** (fig. 97). — On donne, par exemple, la projection horizontale  $m$ ; la projection frontale  $m'$  doit se trouver d'une part sur la ligne de rappel de  $m$  et d'autre part sur la projection frontale  $a'b'$  de la droite. La discussion du n° 93 montre que dans le cas général ces droites se rencontrent et le problème admet une solution. On aboutit ainsi à la règle :

**98 bis. Règle.** — Pour qu'un point appartienne à une droite, il faut et en général il suffit que chaque projection du point soit sur la projection de même nom de la droite.

**2<sup>e</sup> épure** (fig. 98). La droite est de profil; on donne la projection frontale  $m'$ . Changer le plan frontal; chercher sur la nouvelle épure le point de la droite qui a pour cote  $m'$ ; revenir à l'épure initiale.

**99. Application.** — Trouver sur une droite définie par deux points  $aa'$ ,  $bb'$ , le point de cote donnée ou d'éloignement donné.

On ramène aisément ce problème au précédent.

**100. Construction des traces d'une droite.** — Nous avons déjà appelé ainsi les points d'intersection  $U$  et  $V$  d'une droite avec les plans de projection.

Une droite non parallèle à un plan de projection possède deux traces  $U$ ,  $V$ ; ces deux points sont :

- distincts quand la droite ne rencontre pas  $xy$  (fig. 99);
- confondus quand la droite rencontre  $xy$  (fig. 101).

Remarquons que la trace horizontale d'une droite  $dd'$  (fig. 100) a

une cote nulle; sa projection frontale  $d'$  est donc sur  $xy$  et, par suite, à la rencontre de  $xy$  avec  $d'$ . On rappelle ensuite  $d'$  en  $u$ .

Même méthode pour construire la trace frontale  $vv'$ .



FIG. 99.



FIG. 100.



FIG. 101.

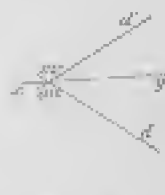


FIG. 102.

**101.** — Si la droite donnée  $dd'$  rencontre  $xy$  (fig. 102) les traces  $uu'$ ,  $vv'$  sont confondues au point de rencontre.

**102.** — Si la droite donnée  $aa'b'b'$  est de profil, on utilise un changement de plan frontal (fig. 103). Il n'y a rien de changé pour la recherche du point  $u'$ , ou  $vv'$  qui est trace horizontale dans chacune des deux épure.

Par contre, le point  $vv'$  n'est trace frontale que par rapport au plan frontal initial; sa projection horizontale  $v$  est connue; on la rappelle en  $u'$  et on revient à l'épure initiale.

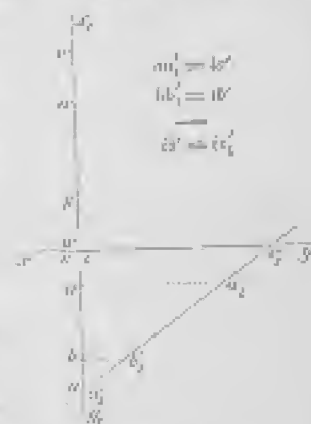


FIG. 103.

**103. Exercices.** — 1. Étudier les positions d'une droite  $DD'$  par rapport aux plans de projection.

On construit les traces; elles limitent les régions comprises dans les différents dièdres de projection.

Sur les figures 104, nous avons posé la droite en supposant :

- 1<sup>re</sup> les deux plans de projection opaques;
  - 2<sup>re</sup> la projection frontale vue par un observateur situé sur le plan horizontal de projection, très loin en avant de  $xy$ ;
  - 3<sup>re</sup> la projection horizontale vue par un observateur situé dans le plan frontal très loin au dessus de  $xy$ .
- Les parties vues par cet observateur sont en trait plein, les parties cachées en pointillés (petits fonds).

11. — Traces d'une droite  $DD'$  sur les plans bissecteurs (fig. 103).

La réponse est immédiate pour le 2<sup>e</sup> bissecteur : la droite  $DD'$  le coupe



FIG. 103.

contre un point  $aa'$  dont les deux projections sont au point de rencontre de  $D$  et  $D'$  (Expliquer pourquoi).

Pour obtenir le point  $aa'$  où  $DD'$  coupe le 1<sup>er</sup> bissecteur, on prend la



FIG. 104.

droite  $D$ , symétrique de  $D'$  par rapport à  $xy$  : elle rencontre  $D$  en  $a$ , que l'on rappelle en  $a'$ . (A. expliquer).

Chacune de ces constructions donne aisément la condition de parallélisme d'une droite avec le 1<sup>er</sup> ou avec le 2<sup>e</sup> bissecteur. (A. expliquer).

## § 2. — DROITES REMARQUABLES

104<sup>1re</sup>. Horizontale (fig. 106).

On appelle ainsi une droite parallèle au plan horizontal de projection.

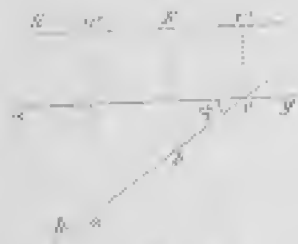


FIG. 106.

Pour qu'une droite soit horizontale, il faut et il suffit :

que deux de ses points aient la même cote;

autrement dit, que sa projection horizontale soit parallèle à  $xy$ .

Exceptionnellement, sa projection frontale peut être réduite à un point; cette horizontale prend alors la position particulière de droite de front.

Une horizontale n'a pas de trace horizontale. La recherche de la trace frontale ne présente rien de particulier.

Remarquons que :

1<sup>o</sup> le segment  $ab$  est égal au segment  $AB$  de l'espace;

104<sup>2de</sup>. Droite de front (ou frontale) (fig. 107).

On appelle ainsi une droite parallèle au plan frontal de projection.



FIG. 107.

Pour qu'une droite soit de front, il faut et il suffit :

que deux de ses points aient le même éloignement;

autrement dit, que sa projection horizontale soit parallèle à  $xy$ .

Exceptionnellement, sa projection horizontale peut être réduite à un point; cette frontale prend alors la position particulière de verticale.

Une frontale n'a pas de trace frontale. La recherche de la trace horizontale ne présente rien de particulier.

Remarquons que :

1<sup>o</sup> le segment  $a'b'$  est égal au segment  $AB$  de l'espace;

2° l'angle  $\varphi$  est égal à l'angle de la droite AB avec le plan frontal de projection.

2° l'angle  $\varphi$  est égal à l'angle de la droite AB avec le plan horizontal.

**105. Exercice.** — Rendre une droite  $ab$  *de front* par un changement de plan frontal (fig. 108).

On prend la nouvelle ligne de terre  $x_1y_1$  parallèle à la projection horizontale  $ab$  de la droite. Cette épure donne en même temps :

1° la longueur  $a_1'b_1'$  du segment AB de l'espace

2° l'angle  $\theta$  de la droite donnée avec le plan horizontal.



FIG. 108.



FIG. 109.

Revoir les épreuves 98 et 103 sur lesquelles la droite de profil  $aba'b'$  a été rendue de front.

**106. Droite verticale.** — Droite de bout.

Ces droites ont déjà été définies et étudiées antérieurement. Ce sont respectivement des positions particulières d'une frontale et d'une horizontale.

**107. — Autres droites particulières.**

**Droite parallèle à  $xy$  :** à la fois horizontale et de front; n'a aucune trace (faire l'épure).

**Droite de profil :** orthogonale à  $xy$ ; déjà étudiée.

**Droite du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>e</sup> bissecteur :** la définir par deux points du bissecteur considéré (fig. 109); ses deux projections sont : ou bien symétriques par rapport à  $xy$ , ou bien coïncidentes (nécessaire et suffisant).

### § 3. — DROITES CONCURRANTES

Proposons-nous de reconnaître si deux droites données sur une épure sont concourantes.

**108. —** Un premier cas particulier, où la réponse est immédiate,

est celui où les droites données  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$  (non de profil) ont deux projections de même nom confondues. Supposons par exemple qu'elles aient même projection frontale (fig. 110). Elles sont dans un même plan, le plan de bout qui les projette sur le plan frontal; d'autre part, elles ne sont pas parallèles sinon leurs projections horizontales le seraient; elles sont donc concourantes.

Leur point commun est  $m'm'$ .

**109. —** Supposons maintenant deux droites données perpendiculaires à un plan de projection, par exemple verticale (fig. 111); la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $m'm'$  appartienne à cette verticale est que  $m$  soit au point  $ab$ ; donc :

Pour qu'une droite  $DD'$  rencontre une verticale  $aba'b'$ , il faut et il suffit que sa projection horizontale  $D$  passe par le point  $ab$  projection horizontale de la verticale.

Le point commun est  $m'm'$ .

Si l'une des droites est de bout, on lui applique le raisonnement et la règle corrélatifs.

**110. —** Abordons maintenant le cas général. Les deux droites  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$  (fig. 112) seront concourantes s'il existe un point  $m'm'$  situé à la fois sur chacune d'elles; or, pour qu'un point  $m'm'$  appartienne à une droite quelconque,  $DD'$  par exemple, il faut et il suffit que chaque projection du point soit sur la projection de même nom de la droite,  $m$  sur  $D$ ,  $m'$  sur  $D'$  (fig. 112); on aboutit ainsi à l'énoncé suivant :

**Règle.** — Pour que deux droites non de profil, soient concourantes, il faut et il suffit que leurs projections de même nom se coupent et que les deux points communs soient sur une même ligne de rappel.



FIG. 110.



FIG. 111.

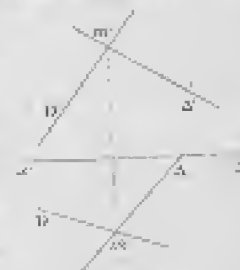


FIG. 112.

111. Cas où l'une des droites données est de profil. — Laissons de côté le cas particulier où cette droite de profil serait verticale ou de haut, déjà traité au n° 109.

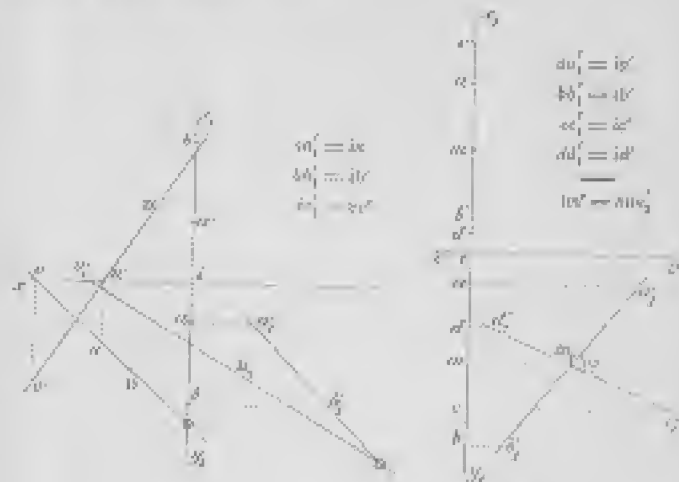


FIG. 113.

FIG. 114.

La méthode consiste à revenir au cas général par un changement de plan frontal. Sur la figure 113 la droite  $DD'$  est quelconque et la droite  $ab'a'b'$  de profil; le tracé montre qu'elles ne sont pas concurrentes.

Sur la figure 114, les deux droites données  $a'b'a'b'$  et  $c'dc'd'$  sont de profil. Étant dans le même plan de profil, elles ne peuvent être que concurrentes ou parallèles. L'épure montre qu'elles sont concurrentes. Remarquons qu'elle donne également leur angle,  $\varphi$ .

112. Exercice. — Soit deux droites  $DD'$ ,  $DD'$  dont les projections de même nom se coupent en dehors de l'épure (fig. 115). Examiner si elles sont concurrentes.

Prenez sur la droite  $DD'$  deux points  $aa'$ ,  $bb'$ , sur la droite  $DD'$  deux points  $cc'$ ,  $dd'$  et tracez les droites  $acd'a'$ ,  $bcd'b'$ . Les deux droites données ne sont pas parallèles puisque leurs projections de même nom ne le sont pas (GG, VI) il en est de même pour les deux droites auxiliaires; par suite, si les droites de l'un des couples sont concurrentes, les quatre droites sont dans le même plan et les droites de l'autre couple sont

également concurrentes. On est donc ramené à examiner si les droites  $acd'a'$ ,  $bcd'b'$  sont concurrentes ce qui est graphiquement possible



FIG. 115.

FIG. 116.

pourvu qu'on ait soin de placer les projections de même nom de manière qu'elles se coupent à l'intérieur de l'épure.

Remarque. — Ce procédé peut encore être appliqué au cas de deux droites dont l'une est de profil et l'autre quelconque (fig. 116).

### 113. — Exercices de constructions de droites.

I. — Mener par un point  $aa'$  une horizontale rencontrant une droite donnée  $DD'$ . Voir la figure 117; la droite demandée est  $az'a'z'$ .



FIG. 117.

FIG. 118.

FIG. 119.

II. — Mener dans le plan frontal de projection une parallèle à  $xy$  traversant une droite donnée  $DD'$ .

Le point de rencontre est la trace frontale  $aa'$  de  $DD'$  (fig. 118). La droite cherchée est  $az'a'z'$ .

III. — Construire une droite issue d'un point  $aa'$ , s'appuyant sur une droite de bout  $bcb'b'$  et sur une droite quelconque  $DD'$ .

On connaît immédiatement la projection frontale  $a'p'$  de la droite cherchée (fig. 119) on termine en rappelant le point  $a'$  de rencontre de  $a'p'$  et  $W$ .

#### § 4. — DROITES PARALLÈLES

114. — Si deux droites sont parallèles, leurs projections de même nom sont nécessairement parallèles (GE, 91; intersections de deux plans parallèles par un troisième).

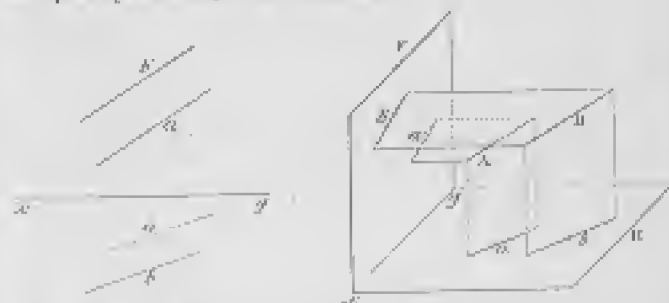


FIG. 120.

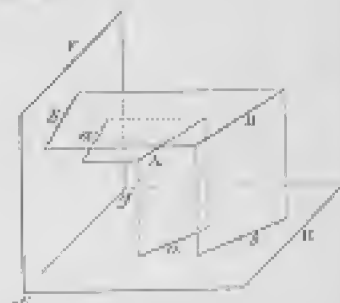


FIG. 121.

Inversement, considérons deux droites définies par leurs projections  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  (donc, non de profil) et dont les projections de même nom sont parallèles :  $a \parallel b$ ,  $a' \parallel b'$  (fig. 120). Les plans projetant ces deux droites sur le plan horizontal, par exemple, (fig. 121) sont parallèles comme définis par deux couples de droites concourantes parallèles chacune à chacune :  $a$  et  $b$  d'une part, deux verticales d'autre part. Chacun des plans projetants qui définissent  $B$  est donc parallèle à  $A$  (comme parallèle à un plan projetant de  $A$ ); leur intersection  $B$  est donc parallèle à  $A$ .

En résumé :

115. **Théorème.** — *Pour que deux droites non de profil soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient parallèles.*

On ramène le cas des droites de profil au cas général par un changement de plan frontal (fig. 122).

116. **Exercice.** — Démontrer l'énoncé suivant : Pour que deux droites soient équipollentes, il faut et il suffit que leurs projections du même nom soient des vecteurs équipollents.

117. **Problème.** — *Mener d'un point donné  $m'$  la parallèle à une droite donnée.*

Si la droite donnée n'est pas de profil et est définie par ses projections  $d$ ,  $d'$  (fig. 123) on trace une parallèle à  $d$ ,  $m'p'$  parallèle à  $d'$ ;  $m$  et  $m'p'$  sont les projections de la droite demandée.

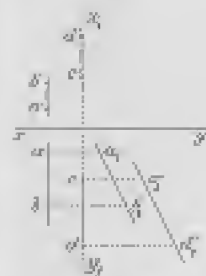


FIG. 122.



FIG. 123.



FIG. 124.

Si la droite donnée  $aba'b'$  est de profil (fig. 124), on trace  $mp$  équipollente à  $ab$ ,  $m'p'$ , équipollente à  $a'b'$ ;  $mpm'p'$  est la parallèle cherchée.

#### 118. — Problèmes de constructions de droites.

I. — Construire une parallèle à une droite donnée  $DD'$  (non de profil) s'appuyant sur une verticale  $cha'b'$  et sur une droite quelconque  $AA'$ .

On peut tracer immédiatement la projection horizontale de la droite cherchée. Faire l'épure.

II. — Construire une parallèle à une droite de profil  $aba'b'$ , s'appuyant sur une parallèle  $DD'$  à  $xy$  et sur une droite quelconque  $AA'$ .

Prendre un nouveau plan frontal de projection perpendiculaire à  $DD'$  (c'est-à-dire de profil dans l'ancienne épure). Sur la nouvelle épure, la droite  $DD'$  est de bout (Épure à faire).

119. **Exercice.** — Étudier les parallèles au 1<sup>er</sup> ou au 2<sup>nd</sup> bissecteur; les construire au moyen, par un point, non parallèle à une droite de l'un de ces plans (voir n<sup>o</sup> 107; comparer à 101-II).

120. **Remarque.** — Deux droites qui sont dans un même plan et ont, par exemple, leurs projections horizontales parallèles ne peuvent pas être concourantes; elles sont donc parallèles dans l'espace; par suite, leurs projections frontales sont également parallèles.

## CHAPITRE III. — LE PLAN

**121.** — Rappelons qu'on appelle *traces* d'un plan les droites d'intersection de ce plan avec les plans de projection.



Fig. 125.

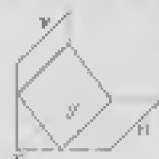


Fig. 126.

Un plan quelconque (non parallèle à un plan de projection) possède deux traces  $P$ ,  $Q$  qui sont généralement concourantes en un point de  $xy$  (fig. 126); elles sont parallèles à  $xy$  (et entre elles) quand le plan donné est parallèle à  $xy$  (fig. 125).

**122. Représentation d'un plan.** — On peut définir un plan sur une épure de la même manière que dans l'espace :

- 1° par deux droites concourantes;
- 2° par une droite et un point extérieur;
- 3° par trois points non en ligne droite;
- 4° par deux droites parallèles.

Ces différents procédés se ramènent aisément les uns aux autres.

Le premier est graphiquement le plus commode et sera désormais systématiquement employé (fig. 127). Il comporte une variante importante, consistant à représenter un plan par ses traces supposées concourantes (fig. 128). On énonce ce plan  $PzQ'$ .



Fig. 127.



Fig. 128.

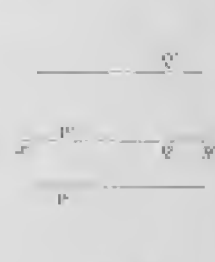


Fig. 129.

Dans le cas exceptionnel où un plan est parallèle à  $xy$ , on peut encore le représenter par ses traces, qui sont alors tombées deux parallèles à  $xy$  (fig. 129).

## § 1. — PLANS REMARQUABLES

**123.** — L'application de ce procédé de représentation aux cas particuliers suivants est immédiate, ainsi que la solution des problèmes relatifs à la détermination des éléments (points, droites) contenus dans ces plans.

**124. Plan vertical :** plan perpendiculaire au plan horizontal de projection (fig. 130).

**Plan de bout :** plan perpendiculaire au plan frontal de projection (fig. 131).

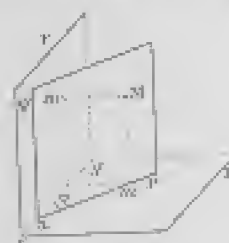


Fig. 130.



Fig. 131.

Si un plan est vertical, sa trace frontale est verticale (intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième) et, sur l'épure, la trace frontale est perpendiculaire à  $xy$  (fig. 132).

Inversement, si la trace frontale d'un plan est perpendiculaire à  $xy$  elle est verticale (G. E. 81) et le plan donné, qui la contient, l'est également.

En résumé :

Pour qu'un plan soit vertical, il faut et il suffit que sa trace frontale soit perpendiculaire à  $xy$ .

Si un plan est de bout, sa trace horizontale est de bout. (intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième) et, sur l'épure, la trace horizontale est perpendiculaire à  $xy$  (fig. 133).

Inversement, si la trace horizontale d'un plan est perpendiculaire à  $xy$ , elle est de bout et le plan, qui la contient, l'est également.

En résumé :

Pour qu'un plan soit de bout, il faut et il suffit que sa trace horizontale soit perpendiculaire à  $xy$ .



Fig. 132.

**125.** — Pour qu'un point  $m'm'$  appartienne à un plan vertical, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit sur la trace horizontale  $xP$  (GE n° 84).

La trace horizontale d'un plan vertical suffit pour définir ce plan.

**126. Remarque.** — L'angle  $\varphi$  de la trace horizontale avec  $xy$  est égal à l'angle du plan donné avec le plan frontal (il est le rectiligne de leur dièdre).

**127. Plan de profil :** plan perpendiculaire à  $xy$ ; il est à la fois vertical et de bout; ses traces sont perpendiculaires à  $xy$  au même point (fig. 134).



Fig. 134.

**128. Plan horizontal :** plan parallèle au plan horizontal de projection.

**Plan de front (ou frontal) :** plan parallèle au plan frontal de projection.



Fig. 133.

Pour qu'un point  $m'm'$  appartienne à un plan de bout, il faut et il suffit que sa projection frontale soit sur la trace frontale  $zQ'$ .

La trace frontale d'un plan de bout suffit pour définir ce plan.

**Remarque.** — L'angle  $\theta$  de la trace frontale avec  $xy$  est égal à l'angle du plan donné avec le plan horizontal (il est le rectiligne de leur dièdre).

C'est une position particulière d'un plan de bout.

La trace frontale est parallèle à  $xy$  (condition nécessaire et suffisante) et il n'a pas de trace horizontale.

C'est une position particulière d'un plan vertical.

La trace horizontale est parallèle à  $xy$  (condition nécessaire et suffisante) et il n'a pas de trace frontale.

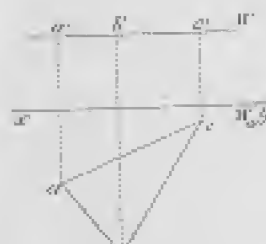


Fig. 135.

**129. Remarque.** — Toute figure contenue dans un plan horizontal est égale à sa projection horizontale.

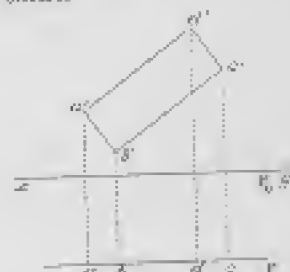


Fig. 136.

**Remarque.** — Toute figure contenue dans un plan de front est égale à sa projection frontale.

## § 2. — PLAN QUELCONQUE

**130. Horizontales, frontales et traces d'un plan. Construction des traces.** — Remarquons d'abord que :

Toutes les horizontales d'un plan s'obtiennent en le coupant par des plans horizontaux; donc :

**Théorème.** — Toutes les horizontales d'un plan (et en particulier sa trace horizontale) sont parallèles entre elles (fig. 137).

Toutes les frontales d'un plan s'obtiennent en le coupant par des plans de front; donc :

**Théorème.** — Toutes les frontales d'un plan (et en particulier sa trace frontale) sont parallèles entre elles (fig. 138).



131. — Considérons maintenant un plan défini par deux droites concourantes  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$  et cherchons à construire ses traces.



FIG. 137.



FIG. 138.

1<sup>re</sup> épreuve. Les deux droites données sont quelconques (fig. 139).

La trace horizontale  $PP'$  du plan contient les traces horizontales de toutes les droites du plan; on l'obtient en joignant les traces horizontales  $bb'$  et  $cc'$  des deux droites données.

On peut opérer de même pour obtenir la trace frontale  $QQ'$ , on observe que le point  $aa'$  où  $PP'$  coupe  $xy$  appartient aussi à  $QQ'$ ; la trace frontale de l'une des droites données (de  $DD'$ , par exemple) achève de déterminer  $QQ'$ .



FIG. 139.

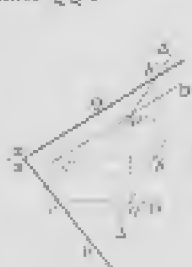


FIG. 140.



FIG. 141.

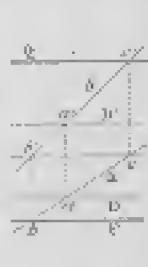


FIG. 142.

2<sup>e</sup> épreuve. L'une des droites données  $DD'$  est de front (fig. 143).

La trace frontale  $QQ'$  est parallèle à  $DD'$ ; on achève de la déterminer au moyen du point  $bb'$ , trace frontale de  $\Delta\Delta'$ ; elle rencontre  $xy$  en un point  $aa'$  qui appartient à la trace horizontale  $PP'$ ; on achève de déterminer  $PP'$  au moyen du point-trace horizontal de  $DD'$ . Si l'une des droites données est horizontale, on exécute le tracé réciproque (voir l'épure).

3<sup>e</sup> épreuve. L'une des droites données  $DD'$  rencontre  $xy$  (fig. 144). Ce point de rencontre  $aa'$  appartient à chaque trace; terminer comme précédemment, au moyen des deux points-traces de  $\Delta\Delta'$ .

4<sup>e</sup> épreuve. L'une des droites données  $DD'$  est parallèle à  $xy$  (fig. 145). Le plan donné et ses deux traces sont parallèles à  $xy$ ; terminer au moyen des deux points-traces de  $\Delta\Delta'$ .

132. Problème fondamental. — Un plan est défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces  $PP'$ ,  $QQ'$ ; on donne l'une des projections d'une droite  $DD'$  de ce plan; trouver l'autre projection.



FIG. 143.

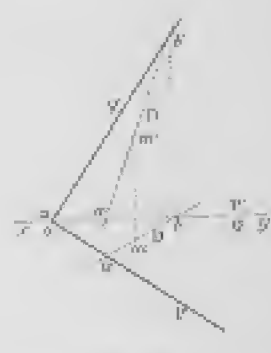


FIG. 144.

Si la projection horizontale  $D$ , par exemple, n'est parallèle ni à  $P$  ni à  $Q$  (fig. 143 et 144) la droite  $DD'$  est concourante avec chacune des droites  $PP'$ ,  $QQ'$  (120); on rappelle donc en  $a'$ ,  $b'$  les points de rencontre  $a$ ,  $b$  (111);  $a'b'$  est la projection frontale  $D'$  cherchée.

Si la droite  $D$  est parallèle à  $P$ , par exemple (fig. 145 et 146), on rappelle en  $b'$  son point de rencontre  $b$  avec  $Q$  et on mène par  $b'$  la droite  $D'$  parallèle à  $P'$  (120).

Sur la figure 146, la droite  $DD'$  est une horizontale du plan donné.

Sur la figure 147, on a supposé  $D$  parallèle à  $Q$ ; la droite  $DD'$  obtenue est alors parallèle à  $QQ'$ ; c'est donc une frontale du plan donné.

133. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher la droite d'intersection d'un plan défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces  $PP'$ ,  $QQ'$  avec un plan :

vertical donné par sa trace | de bout donné par sa trace  
horizontale D | frontale D'

(c'est-à-dire avec un plan perpendiculaire à un plan de projection).

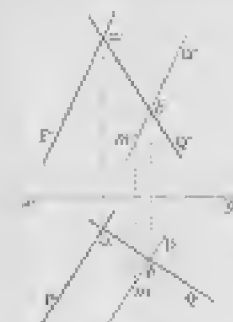


FIG. 145.

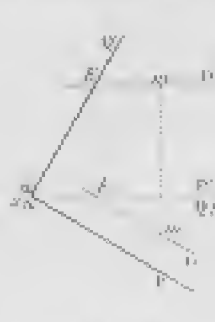


FIG. 146.

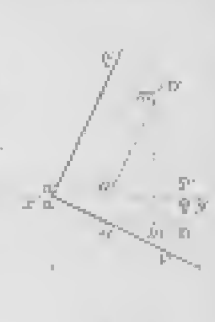


FIG. 147.

Sous avons vu en effet que toute ligne d'un tel plan, et en particulier la droite d'intersection, se projette :

horizontalement sur la trace | frontalement sur la trace fron-  
talière D. | talière D'.

**134. Exercice.** — Prendre une droite dans un plan donné.



FIG. 148.

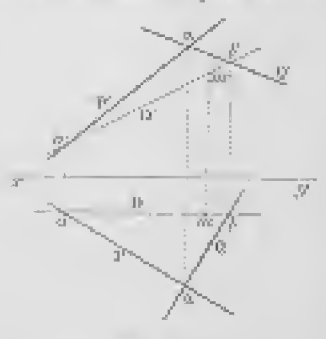


FIG. 149.

On peut se donner arbitrairement la projection horizontale, par

exemple, de la droite et on en déduit sa projection frontale comme on vient de l'indiquer.

En particulier, c'est ainsi qu'on procède pour prendre une horizontale ou une frontale dans un plan défini par deux droites concourantes (fig. 148 et 149).

On pourra, à titre d'exercice, vérifier graphiquement sur ces deux figures que deux horizontales ou deux frontales d'un même plan sont parallèles.

**135. Problème.** — Un plan est défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces; on donne l'une des projections d'un point  $m$  de ce plan; trouver l'autre projection.

On fait passer par la projection donnée, m par exemple, une droite D considérée comme la projection horizontale d'une droite  $DD'$  du plan; on détermine sa projection frontale D' comme on vient de le dire (fig. 148 à 149). On a alors  $m'$  en rappelant.

**136. Autre interprétation.** — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher le point d'intersection d'un plan défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces  $PP'$ ,  $QQ'$  avec une droite :

verticale donnée par sa trace | de bout donnée par sa trace  
horizontale m | frontale  $m'$

(c'est-à-dire avec une droite perpendiculaire à un plan de projection).

**137. Exercice.** — Prendre un point dans un plan donné.

On peut se donner arbitrairement la projection horizontale, par exemple, du point et on en déduit sa projection frontale comme on vient de l'indiquer.

**138. Changement de plan frontal pour un plan.** — Si un plan est défini par deux droites concourantes quelconques  $PP'$ ,  $QQ'$  (fig. 150) on effectue le changement de plan pour chacune de ces droites en utilisant naturellement leur point commun  $a'$ .

Si un plan est défini par ses traces P, Q' (fig. 151), on remarque que la trace horizontale est encore P dans la nouvelle épure; son point de rencontre  $\beta$ , avec  $a'g$ , appartenant à la nouvelle trace frontale; pour en obtenir commodément un 2<sup>e</sup> point, on utilise le point  $a'g'$  de  $QQ'$  dont la projection horizontale  $a$  est au point de rencontre des lignes de terre. C'est le point commun au plan donné et aux deux plans frontaux de projection. Il appartient aussi à la trace frontale

sur la nouvelle épure. Le plan donné est ainsi défini par ses nouvelles traces :  $P_2, R'_1$ .



FIG. 139.



FIG. 140.

### 139. Exercices. — 1° *Rendre un plan de bout.*

On prend la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à une horizontale du plan (fig. 132) ou à sa trace horizontale (fig. 133). N'importe quel

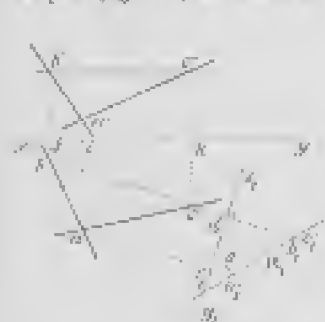


FIG. 132.



FIG. 133.

point du plan se projette alors frontalement sur la trace frontale  $R'_1$  (125). On distingue aisément sur chaque épure quels sont les couples de points qui ont servi à déterminer  $R'_1$ .

Notons que l'angle de  $R'_1$  avec  $xy$  est précisément l'angle  $\theta$  du plan donné avec le plan horizontal.

2° *Comment rend les traces d'un plan parallèle au 1<sup>er</sup> ou au 2<sup>e</sup> bissecteur?*

On peut procéder directement ou par changement de plan.

140. — *Rabattement d'un plan vertical sur le plan horizontal de projection.*

Soit un plan vertical donné par sa trace horizontale  $V$  (fig. 135 et 136) et un point  $mm'$  de ce plan.

140 bis. — *Rabattement d'un plan de bout sur le plan frontal de projection.*

Soit un plan de bout donné par sa trace frontale  $B$  (fig. 135 et 137) et un point  $mm'$  de ce plan.

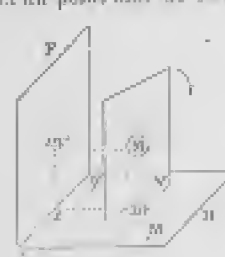


FIG. 134.



FIG. 135.

Si on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale jusqu'à l'appliquer sur le plan horizontal de projection  $H$ , on dit qu'on l'a *rabattu* sur le plan  $H$ .

Si on fait tourner ce plan autour de sa trace frontale jusqu'à l'appliquer sur le plan frontal de projection  $F$ , on dit qu'on l'a *rabattu* sur le plan  $F$ .



FIG. 136.



FIG. 137.

Un point  $mm'$  de ce plan (99) dans l'espace) vient se placer sur la perpendiculaire en  $ss'$  à la trace  $V$  à une distance  $mm'$  égale à la cote  $mm'$  du point  $mm'$ . Les points à cote positive se placent d'un côté déterminé de la trace  $V$  et les points à cote négative de l'autre côté.

Un point  $qq'$  de cette trace ne bouge pas pendant le rabattement.

Étant donné un point  $P$  du rabattement, on trouve ses projections  $pp'$  par l'opération inverse, qui porte le nom de **relèvement**.

#### 141. — Applications.

I. — *Angle d'une droite  $DD'$  avec le plan horizontal de projection.*

Soit  $aa'$  la trace horizontale et  $bb'$  un point quelconque de cette droite (fig. 138). Rabattons sur le plan horizontal le plan vertical contenant cette droite;  $aa'$  ne bouge pas;  $bb'$  vient en  $B$ . L'angle  $\theta$  cherché est  $Ba'a'$ .

Un point  $mm'$  de ce plan (99) dans l'espace) vient se placer sur la perpendiculaire en  $ss'$  à la trace  $R$  à une distance  $mm'$  égale à l'éloignement  $mm'$  du point  $mm'$ . Les points à éloignement positif se placent d'un côté déterminé de la trace  $R$  et les points à éloignement négatif de l'autre côté.

II<sup>re</sup>. — *Angle d'une droite  $DD'$  avec le plan frontal de projection.*

Soit  $aa'$  la trace frontale et  $bb'$  un point quelconque de cette droite (fig. 139). Rabattons sur le plan frontal le plan de bout contenant cette droite;  $aa'$  ne bouge pas;  $bb'$  vient en  $B$ . L'angle  $\varphi$  cherché est  $Ba'a'$ .



FIG. 138.



FIG. 139.

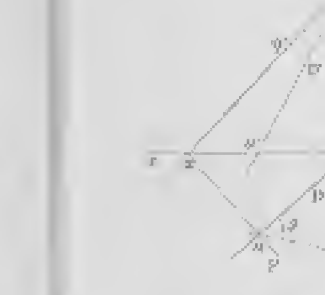


FIG. 140.



FIG. 141.

II. — *Angle de deux droites dont les projections horizontales sont confondues.*

III<sup>re</sup>. — *Angle de deux droites dont les projections frontales sont confondues.*

Elles sont dans un même plan vertical; on le rabat sur le plan horizontal de projection (fig. 139).

Elles sont dans un même plan de bout; on le rabat sur le plan frontal de projection (fig. 141).

#### Lignes de pente d'un plan.

142. — On appelle *ligne de pente d'un plan par rapport :*

au plan horizontal toute droite du plan perpendiculaire à ses horizontales.

au plan frontal toute droite du plan perpendiculaire à ses frontales.

143. *Conséquence graphique.* — Du théorème sur la projection d'un angle droit (GE. 94), on déduit qu'une ligne de pente par rapport :

au plan horizontal est, en projection horizontale, perpendiculaire aux horizontales du plan.

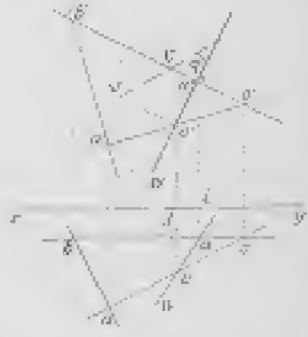
au plan frontal est, en projection frontale, perpendiculaire aux frontales du plan.

Sur l'épure de la figure 142, on a construit une ligne de pente  $DD'$  du plan  $P \propto Q'$  par rapport au plan  $H$  en prenant  $D$  perpendiculaire à  $P$  et en rappelant.

Sur l'épure de la figure 143, on a construit une ligne de pente  $DD'$  du plan  $P \propto Q'$  par rapport au plan  $F$  en construisant d'abord une frontale  $bb'e'$ , en prenant  $b'$  perpendiculaire à  $b'e'$  et en rappelant.



FIG. 142.



144. — *Propriétés géométriques d'une ligne de pente.*

1<sup>re</sup> L'angle d'un plan avec le plan de base ( $H$  ou  $F$ ) est égal à l'angle de sa ligne de pente avec le plan de base.

Sur la figure 162, on a déterminé, par rabattement du plan vertical, l'angle  $\theta$  du plan  $P \propto Q'$  avec le plan  $H$ .

Sur la figure 163, on a déterminé, par rabattement de plan de bout, l'angle  $\gamma$  du plan  $bac'b'a'$  avec le plan  $V$ .

2° Une ligne de pente d'un plan suffit pour définir ce plan.



FIG. 164.



FIG. 165.

Soit  $DD'$  une ligne de pente d'un plan par rapport au plan  $H$  (fig. 164) et  $aa'$  un point de cette droite; l'horizontale du plan issue de  $aa'$  a sa projection horizontale  $aa$  perpendiculaire à  $D$  et sa projection frontale  $a'a'$  parallèle à  $xy$ .

Soit  $DD'$  une ligne de pente d'un plan par rapport au plan  $V$  (fig. 165)  $aa'$  sa trace frontale,  $aa$  sa trace horizontale; la trace frontale  $a'a'$  du plan est perpendiculaire en  $a'$  à  $D'$ ; sa trace horizontale  $a'a$  passe par  $a$  et  $b$ .

#### 145. — Suppression de la ligne de terre.

Considérons un dièdre de projection,  $HxyV$ , et une figure non solidaire de ce dièdre, le triangle  $ABC$  par exemple (fig. 166). Imaginons qu'on déplace le plan  $H$  parallèlement à lui-même, par exemple vers le bas et d'une longueur  $k$ ; la nouvelle projection horizontale est égale à l'ancienne et la projection frontale n'a pas changé. Mais sur l'épure toutes les cotes ayant augmenté de  $k$ , la nouvelle projection frontale se déduit de l'ancienne par une translation perpendiculaire à  $xy$  d'amplitude  $k$  (fig. 167 et 168).

Imaginons, au contraire, qu'on ait déplacé le plan  $V$  parallèlement à lui-même. Sur l'épure, la projection horizontale se serait déplacée par une translation perpendiculaire à la ligne de terre tandis que la

projection frontale aurait conservé la même position par rapport à la ligne de terre.



FIG. 166.



FIG. 167.



FIG. 168.

En résumé, on peut, sur une épure, déplacer les deux projections par des translations perpendiculaires à  $xy$ , sans modifier la forme de l'objet représenté.

Imaginons maintenant que, les deux projections restant immobiles

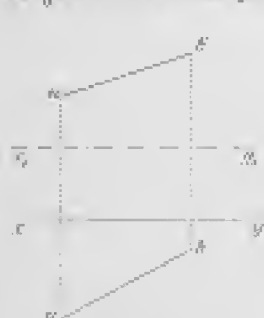


FIG. 169.



FIG. 170.

sur une épure, on déplace la ligne de terre parallèlement à elle-même, par exemple vers le haut et d'une longueur  $l$  (fig. 169). Toutes les cotes diminuent de  $l$  et les éloignements augmentent de  $l$ ; tout se passe donc comme si on avait déplacé par translation le plan  $H$  vers

le haut et le plan  $P$  vers l'arrière, d'une longueur  $L$ . On voit aisément que le dièdre de projection subit une translation dans laquelle  $xy$  se déplace parallèlement à elle-même dans le 2<sup>e</sup> bissecteur (fig. 170).

Lorsque les plans de projection ne sont pas solidaires de la ligne étudiée, la position de la ligne de terre  $xy$  est donc arbitraire et nous pourrions ne pas la tracer. Cela équivaut à ne pas fixer l'origine commune des cotes et des éloignements. Lorsque la connaissance de cette origine devient nécessaire, on fixera une ligne de terre perpendiculaire aux lignes de rappel.

Notons que cette suppression de la ligne de terre est impossible quand les plans de projection sont rattachés à la figure étudiée et notamment quand on utilise les traces d'une droite ou d'un plan.

On pourra, à titre d'exercice, refaire sans ligne de terre les épurés des figures 143, 145, 148, 149, 154.

## LIVRE II

### FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

#### CHAPITRE I. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES

Le parallélisme de deux droites a déjà été étudié.

#### § 1. — PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

146. — Rappelons le théorème suivant :

*Pour qu'une droite  $D$  soit parallèle à un plan  $P$ , il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan  $P$ .*

**Problèmes. I. — Reconnaître si une droite donnée est parallèle à un plan donné.**

147. — La réponse est immédiate quand le plan donné est :  
vertical (fig. 171); toute droite de ce plan a sa projection sur  $xP$  et inversement; donc :

pour qu'une droite  $DD'$  soit parallèle à un plan vertical  $P \equiv Q'$ , il faut et il suffit que sa projection horizontale  $D$  soit parallèle à la trace horizontale  $\equiv P$ .

de bout (fig. 172); toute droite de ce plan a sa projection frontale sur  $aQ'$  et inversement; donc :

pour qu'une droite  $DD'$  soit parallèle à un plan de bout  $P \equiv Q'$ , il faut et il suffit que sa projection frontale  $D'$  soit parallèle à la trace frontale  $\equiv Q'$ .



FIG. 171.

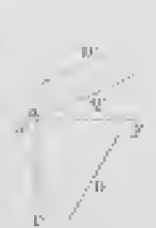


FIG. 172.

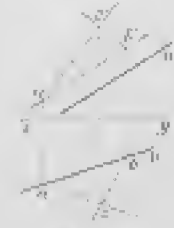


FIG. 173.



FIG. 174.

148. — Dans le cas général où le plan donné est quelconque, on utilise le théorème précédent sous la forme équivalente suivante :

Pour qu'une droite  $D$  et un plan  $P$  soient parallèles, il faut et il suffit que l'intersection du plan  $P$  avec un plan contenant la droite  $D$  soit parallèle à cette droite.

On coupe le plan donné par le plan vertical (ou de bout) projetant la droite  $DD'$  (fig. 173 et 174); sa trace horizontale est confondue avec  $xy$ ; l'intersection des deux plans est  $aba'b'$  (143). Il reste à examiner si  $a'b'$  est parallèle à  $D'$ . Sur l'épure 173, le plan est donné par deux droites concourantes; sur l'épure 174 il est donné par ses traces  $P$  et  $Q'$ .

149. II. — Mener par une droite  $DD'$  le plan parallèle à une droite  $\Delta\Delta'$ .

Ce plan est défini par  $DD'$  et par la parallèle  $aba'b'$  à  $\Delta\Delta'$  issue d'un point  $aa'$  de  $DD'$  (faire l'épure).

150. III. — Mener par un point  $aa'$  le plan parallèle à deux droites données  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$ .

Ce plan est défini par les parallèles  $aba'b'$  à  $DD'$  et  $aca'a'$  à  $\Delta\Delta'$  (faire l'épure).

Exercice. — Reprendre les deux épreuves précédentes en représentant la droite  $\Delta\Delta'$  horizontale ou de front, et construire les traces du plan demandé.

## § 2. — PLANS PARALLÈLES

151. — Rappelons les deux théorèmes suivants :

I. — Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.

II. — Si deux plans sont définis l'un et l'autre par deux droites concourantes parallèles chacune à chacune, les deux plans sont parallèles.

152. — Conséquence graphique.

Pour que deux plans soient parallèles, il faut et, en général, il suffit que leurs traces de même nom soient parallèles (fig. 175).

Le théorème I montre que la condition est nécessaire et le théorème II montre qu'elle est suffisante, pourvu que les traces de chaque plan soient concourantes.

Il n'y a donc exception que pour les plans parallèles à  $xy$ . On revient alors au cas général par un changement de plan frontal (plans  $PQ$  et  $R'S'$ , fig. 176); on peut aussi opérer directement en con-

struire les deux plans par un même plan vertical de trace horizontale  $V$  (fig. 177).



FIG. 175.

FIG. 176.

FIG. 177.

L'énoncé précédent peut être utilisé sous la forme équivalente suivante :

Pour que deux plans quelconques soient parallèles, il faut et il suffit que leurs horizontales soient parallèles ainsi que leurs frontales.

153. Problème. — Mener par un point donné  $aa'$  le plan parallèle à un plan donné.

I. — La solution est immédiate quand le plan donné  $P$  et  $Q'$  est vertical ou de bout (fig. 178 et 179).

II. — Si le plan donné est défini par deux droites concourantes  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$ , le plan cherché est défini par les parallèles  $aba'b'$ ,  $aca'a'$  à ces droites (faire l'épure).



FIG. 178.

FIG. 179.

FIG. 180.

III. — Si le plan donné est défini par ses traces  $P$  et  $Q'$  (fig. 180), il est commode de diriger la construction de manière à obtenir les traces du plan inconnu : on mène d'abord l'horizontale  $aa'$ ,  $a'a'$  parallèle à  $P'$ , on marque sa trace frontale  $aaa'$ , on mène par  $aa'$  la parallèle à  $Q'$ ; c'est la trace frontale  $S'$  du plan inconnu; par son point de rencontre  $S$  avec  $xy$ , on mène  $PS$  parallèle à  $P$ ; c'est la trace horizontale cherchée.

IV. — Si le plan donné est parallèle à  $xy$ , on y prend une droite quelconque  $mnm'$  et on définit le plan cherché au moyen des parallèles à  $xy$  et à  $mnm'$  issues de  $ac'$  (faire l'épure).

## CHAPITRE II. — INTERSECTION DE DROITES ET DE PLANS

### § 1. — INTERSECTION DE DEUX PLANS

**154. Cas particulier.** — L'un des plans donnés est perpendiculaire à un plan de projection.

Ce problème a déjà été traité au n° 139, où on a vu qu'il ne diffère pas de la recherche de la 2<sup>e</sup> projection d'une droite d'un plan dont on a donné l'une des projections.

**155. Cas général. Méthode.** — Voir les nos 52 et 53.

Les plans auxiliaires sont le plus souvent verticaux ou de bout, ou, plus particulièrement, de front ou horizontaux.

**156. A. — Exemples généraux.**

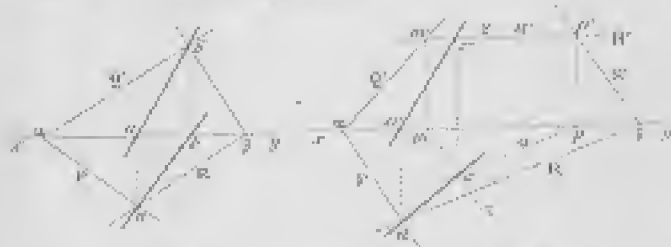


FIG. 181.

Plan auxiliaire.	Intersection avec $P \wedge Q$	Point obtenu.
H de proj.	$xp$	$gh$
P de proj.	$xq$	$ab$

FIG. 182.

Plan auxiliaire.	Intersection avec $P \wedge Q$	Point obtenu.
H de proj.	$xp$	$gh$
H' de proj.	$xq$	$ab$

**E. — Intersection de deux plans donnés par leurs traces.**

Les plans auxiliaires les plus commodes sont ici les plans de projection eux-mêmes, en supposant toutefois que les traces de même nom se coupent sur l'épure (fig. 181).

Si  $ac'$  est le point commun aux traces horizontales et  $ab'$  le point commun aux traces frontales, l'intersection des deux plans est la droite  $aba'b'$ .

Si les traces frontales, par exemple, se coupent en dehors de l'épure (fig. 182), on coupe les deux plans par un plan auxiliaire horizontal  $H'$  (consulter le tableau qui accompagne l'épure), l'intersection des deux plans est  $aca'e'$ .

**H. — Intersection de deux plans donnés par deux droites concourantes  $BAC$ ,  $EDF$  (fig. 183).**

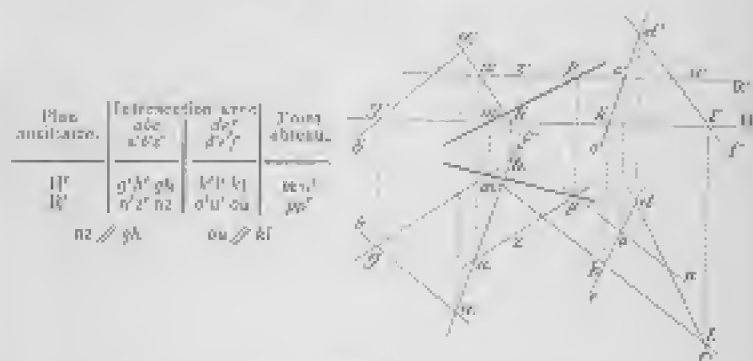


FIG. 183.

Un premier plan auxiliaire horizontal  $H'$  donne les droites  $ghg'h'$ ,  $kk'k'$ ; elles se coupent en  $mm'$  qui est un premier point de l'intersection.

Un deuxième plan auxiliaire horizontal  $H''$  donne les droites  $nnn'$ ,  $ooo'o'$  respectivement parallèles à  $ghg'h'$  et  $kk'k'$ ; elles se coupent en  $pp'$  qui est un deuxième point de l'intersection. L'intersection cherchée est la droite  $mnm'p'$ .

**157. B. — Exemples où on a, à priori, un renseignement sur l'intersection.**

**1. — Intersection de deux plans  $P \wedge Q$ ,  $R \wedge S$  donnés par leurs traces et rencontrant  $xy$  au même point (fig. 184).**

Ce point  $x$  appartient à l'intersection; on en obtient un deuxième  $mm'$  à l'aide du plan auxiliaire horizontal  $H'$  qui coupe les plans donnés suivant les horizontales  $aca'a'$  et  $ba'b'a'$ . L'intersection cherchée est la droite  $xm'x'm$ .



II. — *Intersection de deux plans parallèles à  $xy$  donnés par leurs traces  $PQ'$ ,  $RS'$  (fig. 185).*

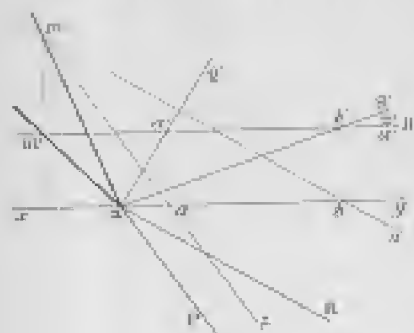


FIG. 185.

On sait d'avance que l'intersection est parallèle à  $xy$ . On en détermine un point  $m$  au moyen d'un plan auxiliaire vertical  $VxW'$  qui coupe chaque plan suivant les droites  $aba'b'$ ,  $ede'e'$ . L'intersection cherchée est la droite  $mm'a'$ .

III. — *Intersection de deux plans  $PxQ'$ ,  $RyS'$  dont deux traces de même nom (les traces horizontales par exemple) sont parallèles (fig. 186).*

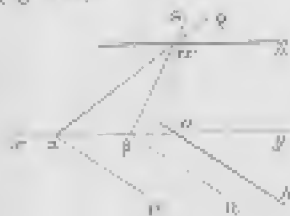


FIG. 186.

On sait d'avance que l'intersection est parallèle aux traces horizontales  $PQ'$ ,  $RS'$ . On en obtient un point  $m$  à la rencontre des traces frontales  $Q'$  et  $S'$  lorsqu'elles se coupent sur l'épure. L'intersection cherchée est l'horizontale  $mm'a'$ .

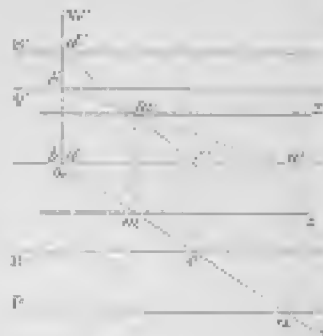


FIG. 187.

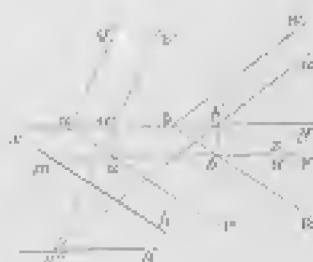


FIG. 188.

Si les traces frontales se coupent en dehors de l'épure (fig. 187), on utilise un plan auxiliaire de front  $F$  pour obtenir un point  $m$  de l'intersection. Il coupe les deux plans donnés suivant les droites  $aba'b'$  et  $ede'e'$ . L'intersection cherchée est l'horizontale  $mm'a'$ .

## § 2. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

158. *Cas particulier.* — *Le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection.*

Cherchons par exemple le point  $m$  d'intersection d'une droite  $DD'$  avec un plan vertical  $PxQ'$  (fig. 188).  $m$ , devant se trouver sur  $xP$  (123) et sur  $D$ , est connu; on le rappelle en  $m'$  sur  $D'$ .

Même solution si le plan est de bout (fig. 189).



FIG. 188.



FIG. 189.



FIG. 190.

Remarque. — La trace frontale  $xQ'$  du plan vertical et la trace horizontale  $PR$  du plan de bout n'ont pas servi; il en est souvent ainsi en pratique et on ne doit figurer ces traces qu'au moment d'en avoir besoin.

159. *Cas général.* — *Méthode.* Pour chercher l'intersection d'une droite  $D$  et du plan quelconque  $P$  (fig. 190), on fait passer par  $D$  un plan auxiliaire  $R$ , on détermine son intersection  $AB$  avec le plan  $P$ ; la droite  $AB$  rencontre  $D$  au point cherché  $M$ .

En général, le plan auxiliaire sera l'un des deux plans qui projettent la droite.

1<sup>re</sup> *épure.* — *Intersection d'une droite  $DD'$  avec un plan  $abr$ ,  $a'b'c'$  défini par deux droites concurrentes (fig. 191).*

Le plan vertical  $D$  qui projette horizontalement la droite coupe le plan  $abra'b'$  suivant la droite  $a'e'f'f'$ ; cette droite rencontre la droite  $DD'$  au point cherché  $m$ .

2<sup>e</sup> épure. — Intersection d'une droite  $DD'$  avec un plan  $P \times Q'$  donné par ses traces (fig. 192).

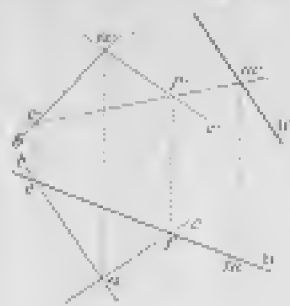


FIG. 191.



FIG. 192.

Le plan de bout  $D'$  qui projette frontalement la droite coupe le plan  $P \times Q'$  suivant la droite  $aa'b'$ ; cette droite rencontre la droite  $DD'$  au point cherché  $aaa'$ .

REMARQUE. — Pour obtenir l'intersection de deux plans, on pourra désormais chercher les points où deux droites de l'un rencontrent l'autre.

### Applications.

#### 160. I. — Intersection de trois plans $P, Q, R$

On cherche la droite  $D$  d'intersection de deux de ces plans,  $P$  et  $Q$  par exemple, puis le point  $M$  d'intersection de la droite  $D$  avec le 3<sup>e</sup> plan  $R$ .  $M$  est le point commun aux trois plans.

#### 161. II. — Problèmes de constructions de droites.

1<sup>re</sup> épure. — Construire une droite issue d'un point  $aa'$  de  $xy$ , s'appuyant sur une frontale  $FF'$  et sur une droite quelconque  $DD'$  (fig. 193).

On cherche le point  $aaa'$  d'intersection du plan  $aa'FF'$  avec la droite  $DD'$ . La droite cherchée est  $aaa'm'$ . On vérifie qu'elle est concourante avec  $FF'$  au point  $pp'$ .

2<sup>e</sup> épure. — Mener par un point  $aa'$  une droite parallèle à un plan  $P \times Q'$  et rencontrant une droite  $DD'$ .

On détermine le plan passant par  $aa'$  et parallèle au plan  $P \times Q'$  (par une horizontale et une frontale ou par ses traces). On cherche

le point  $aaa'$  d'intersection de ce plan avec la droite  $DD'$ . La droite cherchée est  $aaa'm'$ . — Épure à faire.

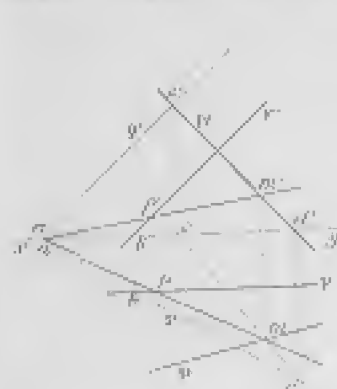
P et Q' ont les traces du plan  $aa'FF'$ .

FIG. 193.



FIG. 194.

3<sup>e</sup> épure. — Mener parallèlement à une direction donnée  $DD'$  une droite s'appuyant sur deux droites données  $AA', BB'$  (fig. 194.)

On mène par l'une des droites,  $AA'$  par exemple, le plan  $Aaa'A'$  parallèle à  $DD'$ ; on cherche le point  $aaa'$  d'intersection de la droite  $BB'$  avec ce plan (plan auxiliaire de bout  $B'$ ); la parallèle  $aaa'm'$  menée de ce point à  $DD'$  est la droite cherchée. On vérifie qu'elle est concourante avec  $AA'$  au point  $pp'$ .

## CHAPITRE III

### DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

162. — Rappelons les deux énoncés suivants :

**Définition.** — On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan quand elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

**Théorème.** — Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites concourantes de ce plan [GE. 47].

Cela posé, considérons un plan  $P\alpha Q'$  donné par ses traces supposées concourantes (fig. 195); en d'autres termes, le plan  $P\alpha Q'$  n'est pas parallèle à la ligne de terre  $xy$  il ne la contient pas. Pour qu'une droite  $DD'$  soit perpendiculaire à ce plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à chacune des traces.



FIG. 195.

D'après le théorème sur la projection de l'angle droit (GE. 98), pour que la droite  $DD'$  soit orthogonale :

à la trace horizontale, il faut et il suffit que ces droites aient leurs projections horizontales  $D$  et  $\alpha P$  perpendiculaires.

à la trace frontale, il faut et il suffit que ces droites aient leurs projections frontales  $D'$  et  $\alpha Q'$  perpendiculaires.

En résumé, on aboutit à l'énoncé suivant :

**163. Théorème.** — *Pour qu'une droite définie par ses projections soit perpendiculaire à un plan non parallèle à  $xy$  défini par ses traces, il faut et il suffit que chaque projection de la droite soit perpendiculaire à la trace de même nom du plan.*

Si les traces du plan ne sont pas construites on peut les remplacer par une horizontale et une frontale de ce plan.



FIG. 196.

**164. Cas d'exception.** — *Plan parallèle à  $xy$  (ou contenant  $xy$ ).* Une perpendiculaire à un tel plan est nécessairement de profil; mais les traces du plan étant parallèles, cette condition ne suffit pas. On revient au cas général par un changement de plan frontal rendant le plan donné  $PQ'$  de bout (fig. 196). La droite donnée  $ab, a'b'$ , qui était de profil sur l'ancienne épure, devient de front sur la nouvelle. Elle est perpendiculaire au plan donné  $\beta_1 R_1$  si  $a'b'_1$  est perpendiculaire à  $\beta_1 R_1$ .

**165. 1<sup>er</sup> Problème.** — *Mener par un point  $aa'$  la perpendiculaire à un plan donné; construire son pied  $ii'$  (1).*

I. — Si le plan donné  $P\alpha Q'$  est défini par ses traces, le

1. En d'autres termes : projeter un point sur un plan.

théorème 163 donne immédiatement les projections  $aa''$  (perpendiculaire à  $\alpha P$ ) et  $a'a''$  (perpendiculaire à  $\alpha Q'$ ) de la perpendiculaire cherchée (fig. 197).

Achever l'épure en construisant le pied  $ii'$  (159) et la longueur du segment  $ai, a'i'$ , distance du point au plan (165 ou 140).

Dans le cas particulier où le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection (fig. 198 et 199), la perpendiculaire  $aa'a''$  est parallèle au plan de projection. On a immédiatement son pied  $ii'$  et la longueur du segment  $ai'a''$ . — Il reste à faire, à titre d'exercice, les épreuves dans lesquelles le plan donné est de profil, horizontal ou de front.

Si le plan donné est parallèle à  $xy$ , on le rend de bout par un changement de plan frontal (faire l'épure).

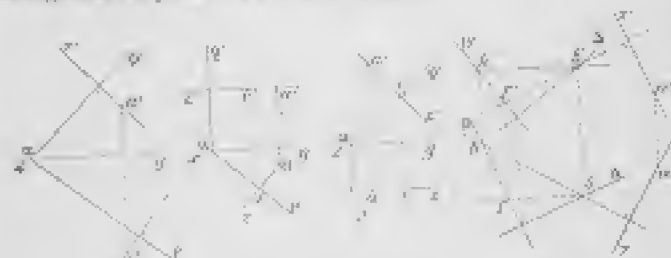


FIG. 197.

FIG. 198.

FIG. 199.

FIG. 200.

II. — *Le plan donné est défini par deux droites concourantes  $DD', \Delta\Delta'$  (fig. 200).*

On détermine d'abord une horizontale  $bb'b'$  et une frontale  $bd'b'$  de ce plan; la perpendiculaire cherchée  $aa'a''$  est obtenue en menant  $aa''$  perpendiculaire à  $bb'$ ,  $a'a''$  perpendiculaire à  $bd'$ .

Achever l'épure en construisant le pied  $ii'$  (159) et la longueur du segment  $ai'a''$ , distance du point au plan (165 ou 140).

**166. Exercice.** — Démontrer que : si un plan à ses traces : 1<sup>re</sup> bissectrice par rapport à  $xy$ , il est perpendiculaire au 1<sup>er</sup> bissecteur, 2<sup>e</sup> bissecteur, il est perpendiculaire au 2<sup>e</sup> bissecteur. (Mener d'un point de  $xy$  la perpendiculaire à ce plan.)

**167. 2<sup>e</sup> Problème.** — *Mener par un point  $aa'$  le plan perpendiculaire à une droite donnée; construire son pied  $ii'$  (1).*

1. En d'autres termes : projeter un point sur une droite.

Dans le cas général où la droite  $DD'$  est quelconque, donnée par ses projections (fig. 201), on obtient immédiatement, par application du théorème 163, une horizontale  $aka'V$  et une frontale  $a'fa'f'$  du plan cherché.

Achever l'épure en construisant le pied  $a'$ .

En pratique, on peut avoir besoin des traces du plan inconnu, on dirige alors les constructions comme il a été indiqué au n° 153 (104).

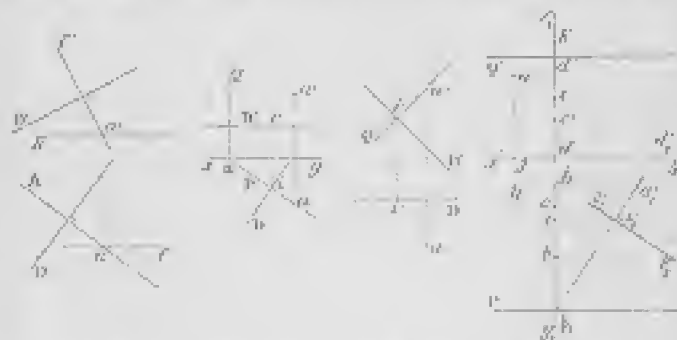


FIG. 201.

FIG. 202.

FIG. 203.

FIG. 204.

Dans le cas particulier où la droite donnée est parallèle à un plan de projection (fig. 202 et 203) le plan cherché est perpendiculaire à ce plan de projection. On a immédiatement ses traces (126, 126 bis) et son pied.

Si la droite donnée est de profil (fig. 204) et définie par deux points  $bb'$ ,  $cc'$ , on la rend de front par un changement de plan frontal. Le plan cherché est  $PQ'$  et il a pour pied  $ee'$ .

168. 3<sup>e</sup> Problème. — Mener par un point  $aa'$  la perpendiculaire à une droite donnée  $DD'$ .

On mène par  $aa'$  le plan perpendiculaire à la droite et on cherche son pied  $ii'$ , la perpendiculaire cherchée est  $ai$ ,  $a'i'$ .

Si la droite est parallèle à un plan de projection, on peut raisonner directement en utilisant le théorème sur la projection de l'angle droit (faire les deux épures).

169. 4<sup>e</sup> Problème. — Perpendiculaire commune à deux droites  $l$ ,  $\Delta$ . La méthode à suivre dans le cas général a été indiquée au n° 79.

Nous nous bornerons à faire l'épure dans les deux cas particuliers suivants, où le tracé se simplifie.

1<sup>er</sup> Cas. — L'une des droites est perpendiculaire à un plan de projection.

Supposons par exemple l'une des droites verticale  $aba'b'$  et l'autre  $dd'$  quelconque (fig. 205).

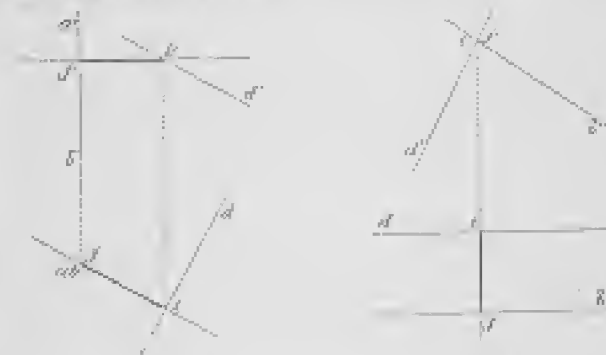


FIG. 205.

FIG. 206.

La droite cherchée  $ijj'$  est une horizontale; en projection horizontale, elle passe par le point  $ab$  et est perpendiculaire à  $d$ ; on peut donc tracer  $ij$ ; on achève en rappelant  $i$  en  $i'$  et en menant  $i'j'$  parallèle à  $xy$ .

La plus courte distance des deux droites est égale au segment  $ij$ .

2<sup>e</sup> Cas. — Les deux droites sont parallèles à un même plan de projection.

Supposons-les par exemple toutes deux de front (fig. 206). La perpendiculaire commune est de bout; sa projection frontale est donc réduite à un point  $ij'$ , lequel se trouve nécessairement à la rencontre des projections frontales  $a'b'$ ,  $d'$ . On termine en rappelant.

La plus courte distance des deux droites est égale au segment  $ij$ .

## LIVRE III

MÉTHODES ET PROBLÈMES GÉNÉRAUX  
(GÉOMÉTRIE COTÉE ET GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE)

## CHAPITRE I. — CHANGEMENT DE PLAN

170. — Cette question ressortit uniquement à la méthode des deux projections. Nous avons déjà appris à utiliser le changement de plan frontal pour faire disparaître une particularité incommode ou introduire une particularité commode dans les données d'une épure.

Ainsi, nous avons ramené les droites de profil, les plans parallèles à  $xy$ , à une position quelconque, ou bien nous avons rendu une droite quelconque de front ou un plan quelconque de bout.

Une transposition facile permet d'effectuer, le cas échéant, un

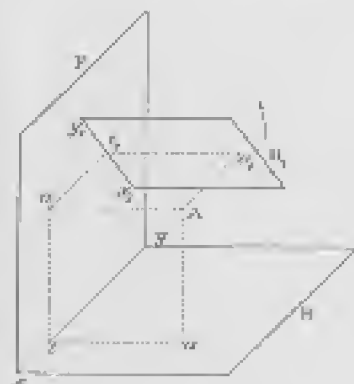


FIG. 207.



FIG. 208.

171. Règle. — Dans un changement de plan horizontal :

1° la projection frontale ne change pas;

2° les éloignements ne changent pas.

Cette transformation permet de rendre :

horizontal une droite quelconque

vertical un plan quelconque (faire les épures).

Remarque. — On peut également, par un changement de plan frontal, rendre :

de bout une droite horizontale,

de front un plan vertical.

Faire les épures.

horizontal, rendre :

verticale une droite frontale,

de front un plan de bout.

Montrer comment on peut, par deux changements de plans successifs, rendre :

une droite quelconque perpendiculaire à un plan de projection;

un plan — parallèle — — — — —

172. Exercice. — Perpendiculaire commune à deux droites  $DD'$ ,  $\Delta\Delta'$  dont l'une est de front (fig. 209).



FIG. 209.

On ramène cette épure à celle du n° 169-1° par un changement de plan horizontal rendant verticale la frontale donnée  $DD'$ .

changement de plan horizontal (fig. 207 et 208); il suffit d'appliquer la règle suivante :

## CHAPITRE II. — ROTATIONS

De même qu'un changement de plan, une rotation peut être utilisée :

1° pour faire disparaître des particularités incommodes;

2° pour en introduire de commodes;

3° pour obtenir une vue différente de l'objet représenté.

Rappelons l'énoncé suivant (fig. 210).

173. — Si une figure se déplace par rotation, tous ses points se déplacent sur des cercles ayant pour axe l'axe de rotation et décrivent des arcs de cercle de même mesure et de même sens.



FIG. 210.

Il est commode de le mettre sous la forme équivalente suivante :

*Si une figure se déplace par rotation :*

1° sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe subit une rotation du même angle et de même sens autour du pied de l'axe;

2° les distances de ses points à ce plan ne varient pas.

## § 1. — ROTATION EN GÉOMÉTRIE COTÉE

174. — La rotation est rarement employée en Géométrie cotée. Si l'axe est vertical, c'est une rotation pure et simple de l'épure autour du pînt de cet axe, chaque point conservant sa cote. Si l'axe est horizontal, on utilise une projection auxiliaire sur un plan vertical perpendiculaire à l'axe, procédé qui sera étudié au paragraphe suivant.

## § 2. — ROTATION EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Nous nous bornerons aux cas où l'axe est perpendiculaire à un plan de projection.

175. Rotation d'un point. — L'énoncé n° 173 peut être mis sous la forme :



FIG. 211.

Si un point  $a'$  tourne autour d'un axe vertical  $ozo'$  (fig. 211)

1° sa projection horizontale  $a$  décrit un arc de cercle de centre  $o$ , dont la mesure et le sens sont donnés;

2° sa projection frontale  $a'$  se déplace sur une parallèle à  $zy$ .



FIG. 212.

Si un point  $a''$  tourne autour d'un axe de bout  $ozo'$  (fig. 212)

1° sa projection frontale  $a'$  décrit un arc de cercle de centre  $o'$ , dont la mesure et le sens sont donnés;

2° sa projection horizontale  $a$  se déplace sur une parallèle à  $xy$ .



FIG. 213.

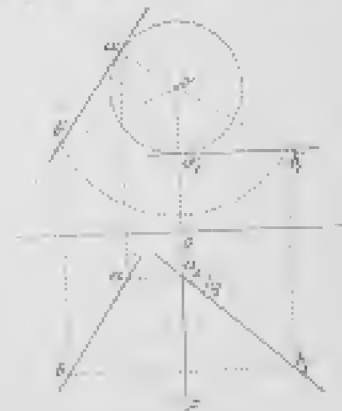


FIG. 214.

**176. Rotation d'une droite.** — On en fait tourner deux points. Il est commode de prendre pour l'un de ces points le point  $aa'$  de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite (fig. 213). Pour avoir la nouvelle projection horizontale d'un point  $bb'$ , on peut, ou utiliser le cercle de centre  $a$  passant par  $b$ , ou porter  $a_1b_1 = ab$ .

Le tracé se simplifie quand la droite rencontre l'axe, car le point commun reste immobile pendant la rotation (faire l'épure).

**177. Exercice.** — *Rendre une droite parallèle à un plan de projection.*

On peut rendre une droite :  
de front par une rotation autour d'un axe vertical ;  
horizontale — — — de bout.

Cette dernière épure a été exécutée sur la figure 214. On a fait tourner la droite jusqu'à ce que sa projection frontale soit parallèle à  $xy$ .

Dans la nouvelle position, on obtient :

- 1° la longueur  $a_1b_1$  du segment  $AB$  de l'espace ;
- 2° l'angle  $\varphi$  de la droite avec le plan frontal de projection.

**178. Remarque.** — On peut également rendre :

- 1° de bout une horizontale (rotation d'axe vertical) ;
- 2° verticale une frontale (rotation d'axe de bout).

Faire les épreuves.

Montrer comment on peut, au moyen de deux rotations successives, rendre une droite quelconque perpendiculaire à l'un des plans de projection.

**179. Rotation d'un plan.** — On en fait tourner trois points ou un point et une droite.

Il est commode d'utiliser le point  $aa'$  où l'axe perce le plan, car ce point reste fixe, et de faire tourner une horizontale si l'axe est vertical, une frontale si l'axe est de bout. Sur la figure 215, l'axe est de bout et on a fait tourner la trace frontale du plan.

Si le point  $bb'$  est en dehors de l'épure, on peut faire tourner deux horizontales ou deux frontales du plan.

Remarquons que tous ces procédés équivalent à faire tourner la ligne de pente qui rencontre l'axe et qui, comme nous l'avons vu, suffit pour définir le plan.

**180. Exercice.** — *Rendre un plan perpendiculaire à un plan de projection.*

On peut rendre un plan :  
de bout par une rotation autour d'un axe vertical ;  
vertical — — — de bout.

La 1<sup>re</sup> épure a été exécutée sur la figure 216. On a fait tourner le plan jusqu'à ce que sa trace horizontale soit perpendiculaire à  $xy$ .

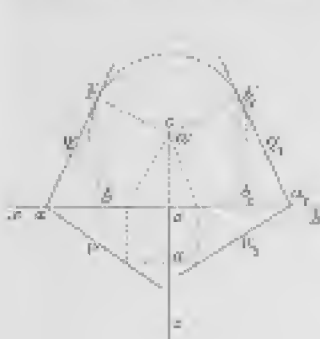


FIG. 215.

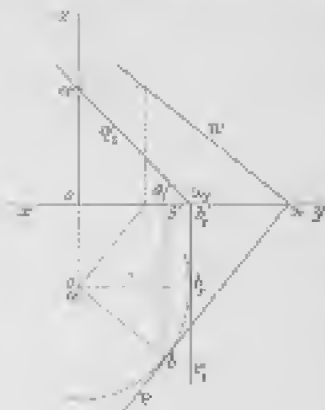


FIG. 216.

La nouvelle position nous donne l'angle  $\theta$  du plan avec le plan horizontal.

**181. Remarque I.** — On peut rendre également :  
de front un plan vertical (rotation d'axe vertical),  
horizontal un plan de bout (rotation d'axe de bout).

Faire les épreuves.

Montrer comment on peut, au moyen de deux rotations successives, rendre un plan quelconque parallèle à l'un des plans de projection.

**182. Remarque II.** — On constate que les changements de plan et les rotations résolvent les mêmes problèmes ; cela s'explique aisément : pour amener une droite à être de front, il est clair qu'on peut déplacer soit le plan frontal de projection, soit la droite donnée. Le résultat obtenu est le même, mais les tracés sont différents.

Quand deux transformations sont nécessaires, on peut même utiliser successivement les deux méthodes précédentes. Ainsi, pour rendre une droite quelconque verticale, on peut :



FIG. 217.

- 1° la rendre de front par un changement de plan frontal;  
2° la rendre verticale par une rotation autour d'un axe du bout.

183. Remarque III. — Nous avons considéré uniquement les rotations dont l'axe est perpendiculaire à un plan de projection. Si l'axe est parallèle à un plan de projection (horizontal ou de front) on rendra cet axe perpendiculaire à l'autre plan de projection par un changement de plan approprié (fig. 217). Le point  $a''$  deviendra sur la nouvelle épure,  $a'x'$ ; il tournera jusqu'en  $a_1x'_1$  ou, sur l'épure primitive,  $a_1a'_1$ .

## CHAPITRE III. — RABATTEMENTS

### 1. — MÉTHODES ET TRACÉS GÉNÉRAUX

(G. cotée et G. descriptive)

184. Définition. — Rabattre un plan P sur un plan horizontal quelconque H, (fig. 218) c'est faire tourner le plan P autour de son intersection AB avec le plan H, jusqu'à ce qu'il coïncide avec ce plan.

Dans cette nouvelle position une figure du plan P (triangle, cercle, etc.) se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal. On peut donc effectuer sur la projection des constructions ou des mesures. Ces constructions effectuées, on ramène

par la rotation inverse le plan dans sa position initiale. C'est le **relevement**.

L'horizontale AB s'appelle **charnière** du mouvement.

185. Méthode. — Soit MM la perpendiculaire à la charnière AB; c'est une ligne de pente: sa projection  $m$  est donc perpendiculaire à la projection  $ab$  de la charnière. Soit M<sub>1</sub> le rabattement du segment MM; il est resté perpendiculaire à AB pendant le mouvement et

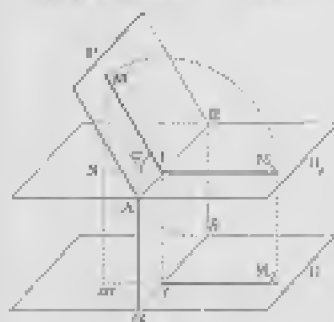


Fig. 218.

sa projection M<sub>1</sub> est perpendiculaire à  $ab$ ; M<sub>1</sub> se trouve donc sur la perpendiculaire  $m$  menée de  $m$  à la projection  $ab$  de la charnière.

D'autre part, la distance MM ou M<sub>1</sub>, ou MM est l'hypoténuse du triangle rectangle MMN dont nous connaissons les deux côtés de l'angle droit: NM est égal à la distance  $m$  des projections du point et de la charnière; NM est égal à la différence des cotes du point et de la charnière.

En résumé, nous obtenissons à l'énoncé suivant:

186. Règle du triangle rectangle. — Le rabattement d'un point extérieur d'une horizontale se projette horizontalement:

1° sur la perpendiculaire menée de la projection du point à la projection de la charnière;

2° à une distance de la charnière égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance des projections horizontales du point et de la charnière et la différence des cotes du point et de la charnière.

187. Épure. — Cette règle s'applique en géométrie cotée aussi bien qu'en géométrie descriptive (fig. 219 et 220). Nous avons désigné



Fig. 219.

Rab. de M  $\left\{ \begin{array}{l} m_1 \perp ab \quad mm' \parallel ab \\ mm' = 5,8 - 3 = 2,8 \end{array} \right.$   
Relèv. de P  $\left\{ \begin{array}{l} m_1 \perp ab \quad m_1' \parallel mm' \\ cote \text{ de } p = 3 - 2p' \end{array} \right.$



Fig. 220.

Rab. de M  $\left\{ \begin{array}{l} m_1 \perp ab \quad mm_1 \parallel ab \\ mm_1 = 5,8' \end{array} \right.$   
Relèv. de P  $\left\{ \begin{array}{l} m_1 \perp ab \quad m_1' \parallel mm_1 \\ m_1' = 5,8' \end{array} \right.$

dans les deux cas la projection du rabattement par M. Il est commode de construire le triangle rectangle sur  $mm$  comme côté, le sommet de l'angle droit étant en  $m$  ( $mm'$  en cotée,  $mm_1$  en descriptive).



Le sens dans lequel se porte l'hypoténuse de ce triangle à partir de  $i$  sur la perpendiculaire à  $ab$  dépend du sens choisi pour le rabattement.

**188. Remarque.** — L'angle aigu en  $i$  du triangle rectangle est égal à l'angle  $\varphi$  du plan rabattu  $P$  avec le plan horizontal. Par suite, si on rabat plusieurs points du plan  $P$  tous les triangles rectangles correspondants sont semblables entre eux.

**189. Relèvement.** — Pour relever un point ayant pour rabattement  $P$ , on lui applique la construction inverse (notée sous chaque épure) en ayant soin de remarquer que si les deux rabattements  $M$  et  $P$  sont, par exemple, de part et d'autre de la charnière  $ab$ , il en est de même pour les projections  $m$ ,  $p$  de leurs relèvements.

**190. Rabattement et relèvement d'une figure.** — Pour rabattre ou relever plusieurs points d'une figure plane, on n'applique pas chaque fois la règle du triangle rectangle : ce procédé serait trop long et aurait en outre le grave inconvénient de distordre la figure, en ce sens que trois points en ligne droite dans l'espace ne le seraient plus sur le rabattement à cause des erreurs graphiques.

On procède de proche en proche, par recoupements au moyen de droites rencontrant la charnière; les points de rencontre restent immobiles pendant le rabattement ou le relèvement.

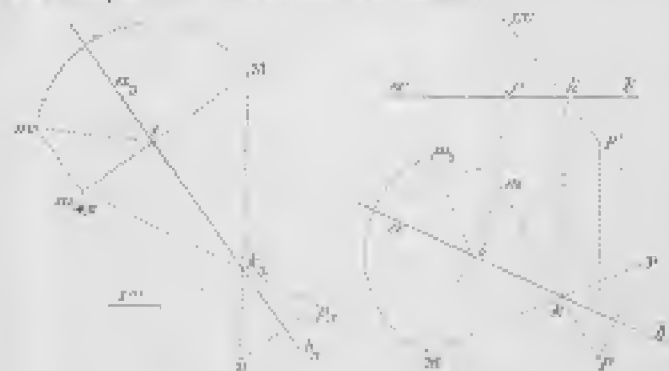


FIG. 221.

FIG. 222.

Relevons par exemple le point rabattu en  $P$  (fig. 221 et 222); joignons  $P$  à un point rabattu  $M$  de manière que  $MP$  rencontre la charnière  $ab$  au point  $k$  situé dans les limites de l'épure.

Le relèvement de la droite  $Mk$  est  $mk$ ; la projection  $p$  du relèvement de  $P$  se trouve sur  $mk$  et sur la perpendiculaire menée de  $P$  à  $ab$ ; on détermine ensuite la cote  $x$  du point de la droite  $mk$ , projeté en  $p$  (11).

Le relèvement de la droite  $Mk$  a pour projection horizontale  $mk$ ; la projection horizontale  $p$  du relèvement de  $P$  se trouve sur  $mk$  et sur la perpendiculaire menée de  $P$  à  $ab$ ; on rappelle ensuite  $k$  en  $k'$  sur  $c'h'$  et  $p$  en  $p'$  sur  $m'h'$ .

**191. Cas particulier.** — *Rabattement d'un plan vertical sur un plan horizontal.* — Cette opération a déjà été utilisée en géométrie cotée. En géométrie descriptive, nous avons eu l'occasion de rabattre un plan vertical sur le plan horizontal de projection (140).



FIG. 223.

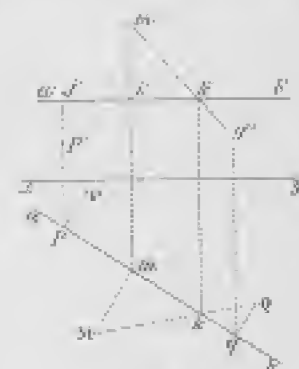


FIG. 224.

Lorsque ce rabattement a lieu sur un plan horizontal quelconque (fig. 223 et 224) le rabattement  $M$  de  $mm'$  se trouve encore sur la perpendiculaire en  $m$  à  $ab$  mais la distance  $mM$  (sur l'épure) est égale à la différence des cotes  $i'm'$  du point  $m$  et de la charnière.

Pour relever un point,  $P$  par exemple, on applique la construction inverse.

Pour rabattre ou relever d'autres points, on opère encore par recoupement; sur la figure 225, on a relevé  $Q$  en  $qq'$  au moyen de la droite  $QM$ , rencontrant la charnière en  $kk'$ .

## § 2. — OPÉRATIONS PROPRES À LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

192. **Rabattement par la frontale.** — Soit un point  $m m'$  que l'on veut rabattre autour de la charnière  $aba'b'$  (fig. 225). Traçons sa frontale  $m f m' f'$ . Supposons le problème résolu et soit  $M$  le rabattement de  $m m'$ ; le segment  $MP$  de l'espace est égal d'une part à sa projection frontale  $m' f'$ , d'autre part à son rabattement  $M f$ , d'où la solution : le rabattement du point  $m m'$  se fait sur la perpendiculaire menée de  $m$  à  $ab$ , à une distance de  $f$  égale à la vraie grandeur  $m' f'$  de la frontale.

Cette construction aboutit à l'intersection d'une droite et d'un cercle et donne deux points : le sens dans lequel on effectue le rabattement permet de préciser lequel des deux est le point  $M$ .



FIG. 225.

$$PM = f'm' \\ PM \neq f'm \quad \text{et } f' \neq f'm.$$

Pour relever un point du plan ABM rabattu en P, on remarque que toutes les frontales d'un plan sont parallèles dans l'espace, en projection et en rabattement; on peut alors effectuer la construction inverse (voir les indications qui accompagnent l'épure). Remarquons que cette construction inverse est un recouvrement par frontale et ligne de pente.

D'autres recouvrements peuvent également être employés, utilisant les horizontales (N) ou des droites rencontrant la charnière (O).

193. **Rabattement d'un plan de bout sur un plan horizontal.** — Soit un plan de bout défini par sa trace frontale  $Q'$  (fig. 226). Pour rabattre un point  $m m'$  de ce plan autour de la charnière  $aba'b'$  (droite de bout), le procédé le plus simple est l'emploi de la frontale  $m f m' f'$ .

Comme on pouvait le prévoir, ce tracé ne diffère pas de celui qui correspond à une rotation d'axe  $aba'b'$ .

On peut remarquer aussi que la frontale est en même temps ligne de pente; le triangle rectangle de la règle est tout construit en  $m' f'$ .

194. **Opérations corrélatives.** — La transposition d'opérations et de langage que nous avons maintes fois employée permettra d'effectuer les opérations suivantes :

Rabattement d'un plan quelconque sur un plan de front

1° par la ligne de pente; énoncer la règle du triangle rectangle et faire l'épure.

2° par l'horizontale. Faire l'épure.

Rabattement d'un plan de bout sur un plan de front (faire l'épure).

— vertical —

Cette dernière opération ne diffère pas d'une rotation d'axe vertical.

195. **REMARQUE.** — Le rabattement vient d'être étudié directement en tant qu'opération simple, mais il peut être rattaché aux changements de plan et maisons ou l'envisager sous la forme suivante : rendre un plan quelconque horizontal en le faisant tourner autour d'une de ses horizontales  $ab, a'b'$ . Nous avons vu que ce problème exige deux opérations successives, par exemple d'abord un changement de plan frontal rendant de bout l'horizontale  $aba'b'$ , puis une rotation autour de cette droite. Sur la fig. 227, la ligne de terre initiale  $xy$ , non dessinée primitivement, a été prise sur  $a'b'$ ; la nouvelle ligne de terre  $x_1 y_1$  est perpendiculaire à  $ab$ ; la trace ainsi obtenue ne diffère pas sensiblement de celui qui a été réalisé directement. Le triangle rectangle  $m_1 p_1 a_1'$  n'est autre que celui de la règle, mais placé ailleurs.



FIG. 226.



FIG. 227.

### § 3. — ÉTUDE DE LA PROJECTION D'UN CERCLE

(G. cotée et G. descriptive)

On sait que la projection orthogonale d'un cercle est une ellipse.

196. Problème. — Un cercle est donné par son plan, son centre et son rayon; construire :

- 1° les axes de la projection;
- 2° au point quelconque et sa tangente.

197. I. — Épure de géométrie cotée. — Soit le cercle de centre  $O$ , de rayon  $r$ , contenu dans le plan d'axe de bout  $P$  (fig. 223).

Le grand axe de l'ellipse projection est la projection du diamètre horizontal du cercle; on obtient les sommets  $a, b$  du grand axe en prenant sur l'horizontale du point  $O$  :  $oa = ob = r$  (rayon).

Le petit axe de l'ellipse est la projection du diamètre de plus grande pente du cercle; celui-ci se rabat sur le plan horizontal de bout  $P$  suivant le diamètre  $CD$  perpendiculaire à  $ab$ . Pour relever  $C$ , nous avons construit un  $ghf$  l'angle  $g$  du plan  $P$  avec le plan horizontal; nous avons mené le rayon  $oc'$  parallèle à  $ag'$ ; la perpendiculaire  $c'e$  à  $oc'$  achève le triangle rectangle de relèvement et donne  $e$ . On prend enfin  $ed = oc$ .



FIG. 223.

Pour obtenir un point quelconque et sa tangente, nous avons relevé un point quelconque  $M$  du cercle rabattu au moyen de la droite  $MC$ ; la tangente  $MT$  au cercle se relève en  $T$ , tangente à l'ellipse.

198. II. — Épure de géométrie descriptive. Le plan du cercle est de bout. Soit



FIG. 224.

le cercle de centre  $oa'$ , de rayon  $r$ , contenu dans le plan de bout  $Q'$  (fig. 225).

Le grand axe de l'ellipse projection du cercle est porté par l'horizontale du point  $oa'$  (l'axe de bout); on obtient les sommets  $a, b$  du grand axe en prenant  $oa = ob = r$ .

Le petit axe est porté par le diamètre perpendiculaire à  $ab$ ; on obtient les projections frontales  $c', d'$  des sommets du petit axe en prenant sur  $Q'$  :  $oc' = od' = r$ ; on rappelle  $c', d'$  sur la perpendiculaire en  $c$  à  $ab$ .

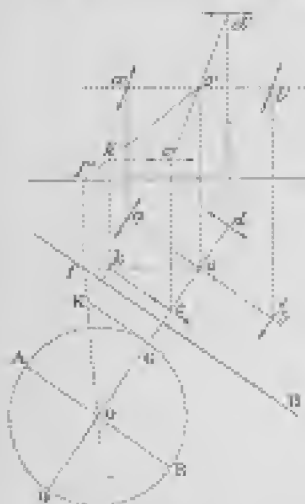


FIG. 225.

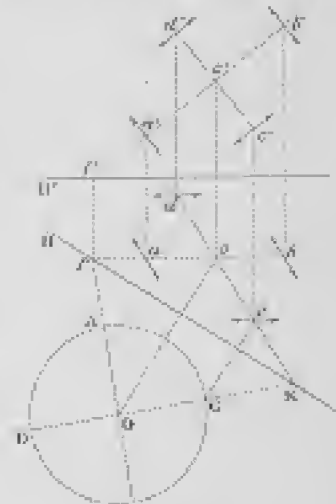


FIG. 226.

On construit au point quelconque  $m$  de l'ellipse et la tangente  $mt$  comme dans l'épure précédente.

199. III. — Épure de géométrie descriptive. Le plan du cercle est quelconque.

Soit le cercle de centre  $oa'$ , de rayon  $r$ , dont le plan est défini par le point  $oa'$  et l'horizontale  $HH'$  (fig. 227, 228, 229). Construisons d'abord le rabattement du cercle autour de l'horizontale  $HH'$  au moyen du rabattement  $O$  de  $oa'$ , obtenu par la frontale  $oa''f'$ .

1° Axes en projection horizontale (fig. 227). Le grand axe est porté par la parallèle à l'horizontale  $HH'$ ; on l'obtient en portant  $oa = ob = r$ . Le petit axe  $cd$  est le rabattement du diamètre  $CD$  perpendiculaire à  $ab$  (on a relevé  $C$  en  $c$  au moyen de l'horizontale relative  $CK$ , relevée en  $c'$  à  $K'$ ).

Remarquons qu'en projection frontale, les tangentes en  $c', d'$  sont parallèles à  $cd'$  et les tangentes en  $a', b'$  sont parallèles à  $cd'$ ,  $ca'$  et  $cb'$  sont les points le plus haut et le plus bas du cercle rabattu.

2° Axes en projection frontale (fig. 228). Le grand axe est porté par la

frontale  $o'f'g'$ ; on l'obtient en portant  $o'a' = o'f' = r$ . Le profil  $aa'$  est le relevement du diamètre  $CD$  perpendiculaire au diamètre  $AB$ , rabattement de diamètre de front. On a utilisé le point de rencontre  $K$  de  $CD$  avec la charnière.

Remarquons qu'en projection horizontale, les tangentes en  $a$  et  $b$  sont parallèles à  $ab$  et les tangentes en  $c$  et  $d$  sont parallèles à  $cd$ .

$ae'$  et  $de'$  sont les points le plus en avant et le plus en arrière du cercle

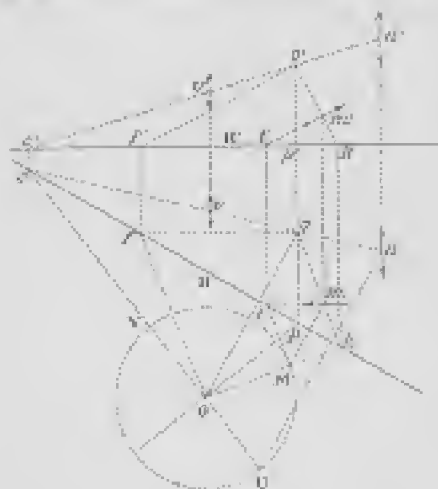


FIG. 232.

3° Prendre quelques  $ai$  sur la tangente (fig. 232). Le point  $M$  du cercle rabattu  $a$  est relevé en  $aa'$  au moyen de la droite  $OMK$ ; la tangente  $AM$  a été relevée en  $aa'm'$ .

Cette construction permet de déterminer les points de la projection du plan passant par un point donné ou est parallèle à une droite donnée du plan en  $III'$ . Cherchons par exemple les points où la tangente est de profil; une droite du profil du plan est  $ao'a'$ , rabattue en  $Up$ ; le diamètre  $UV$  perpendiculaire à  $Up$  est relevé en  $aa'o'$  au moyen de son point de rencontre  $ce'$  avec la charnière;  $aa'$  et  $ao'$  sont les points le plus à droite et le plus à gauche du cercle donné.

## CHAPITRE IV. — DISTANCES ET ANGLES

### § 1. — DISTANCES

#### 200. — Distance de deux points.

I. — *Géométrie cotée.* — Voir le n° 1341 (profil ou rabattement).

II. — *Géométrie descriptive.* — Voir le n° 1061 (changement de plan frontal).

On peut aussi construire la vraie grandeur du segment  $aba'b'$  (fig. 233) en rabattant le plan vertical  $ab$  autour de l'horizontale du point  $aa'$ . Notons qu'on obtient en même temps l'angle  $\theta$  du segment  $aba'b'$  avec le plan horizontal.

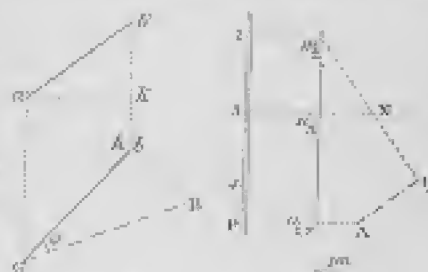


FIG. 233.

#### 201. Distance d'un point à un plan.

Nous avons déjà expliqué (n° 67 en géométrie cotée, 165 en géométrie descriptive) comment on construit la perpendiculaire à un plan issue d'un point  $A$  et le pied  $I$  de cette perpendiculaire; on cherche ensuite la vraie grandeur de ce segment  $AI$  comme on vient de l'indiquer.

Si on désire spécialement la distance du point au plan, on peut utiliser les tracés suivants, qui sont plus rapides.

I. — *Géométrie cotée.* — Soit un plan d'échelle de pente  $P$  et un point  $a_2$  (fig. 234); figurons le plan vertical  $V$  passant par ce point et perpendiculaire aux horizontales du plan  $P$ ; on sait (G.E., n° 84) que la perpendiculaire cherchée se trouve dans le plan  $V$  et est perpendiculaire à l'intersection  $am$ , des plans  $V$  et  $P$ . Rabattons le plan  $V$  sur le plan horizontal de cote 2. La distance cherchée est la perpendiculaire  $AI$  au rabattement  $an$  de l'intersection des plans  $V$  et  $P$ .

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied  $I$ .

II. — *Géométrie descriptive.* — Soit le plan  $P(a'Q')$  et le point  $aa'$

(fig. 235). Faisons un changement de plan frontal rendant le plan  $P\alpha Q'$  de bout. Le segment  $\alpha'i'_1$ , perpendiculaire à la nouvelle trace frontale  $H_1$ , est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on revient à l'ancienne épure pour le point  $i'_1$ .



Fig. 235.

VARIANTE. — Le plan est donné par une horizontale  $HH'$  et une frontale  $FF'$  et il n'y a pas de ligne de terre (fig. 235). On prend l'ancienne ligne de terre sur  $H'$  et la nouvelle perpendiculaire à  $ff'$ .

## 202. — Distance d'un point à une droite.

C'est une construction et une mesure à effectuer dans un plan; on va donc rabattre le plan défini par la droite et le point autour d'une horizontale.

**I. Géométrie cotée.** — Soit la droite  $B$  et le point  $\alpha_1$  (fig. 237); la charnière est  $\alpha_1\alpha_{1,1}$ ; les points  $\alpha$  et  $\alpha_1$  ne bougent pas pendant le rabattement; rabattons un point quelconque  $b_1$  de la droite (règle du triangle rectangle); la distance  $\alpha_1$  de  $\alpha$  au rabattement  $\alpha_1B$  de la droite est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied 1.

Faire les épure des cas particuliers suivants : la droite donnée est horizontale ou verticale.

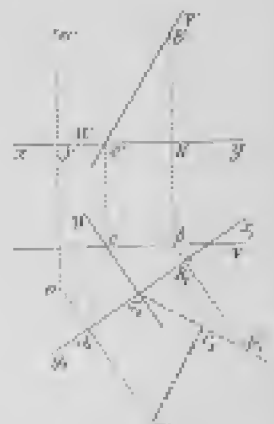


Fig. 237.

**II. Géométrie descriptive.** — Soit la droite  $HH'$  et le point  $\alpha\alpha'$  (fig. 238); la charnière est l'horizontale  $\alpha'\alpha''$ ; les points  $\alpha\alpha'$  et  $b'b'$  ne bougent pas pendant le rabattement; rabattons un point quelconque  $b'b'$  de la droite (règle du triangle rectangle); la distance  $\alpha$  de  $\alpha$  au rabattement  $b'b'$  de la droite est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied 1.



Fig. 238.



Fig. 239.

Si la droite donnée est de profil et définie par deux points  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  (faire l'épure) on prend pour charnière l'horizontale du point  $\alpha\alpha'$  par exemple, définie par son point d'appui  $b'b'$  sur la droite  $\alpha\alpha'\beta\beta'$ .

## § 2. — ANGLES

### 203. — Angle de deux droites.

Nous supposons que les deux droites dont on veut l'angle ont été rendues concourantes. La méthode consiste à rabattre le plan de ces deux droites autour d'une horizontale.

**I. Géométrie cotée.** (fig. 239). — Soit les deux droites  $\alpha_1\beta_1$  et  $\alpha_2\beta_2$ . La charnière est  $b_1c_1$ ; les points  $b_1c_1$  ne bougent pas pendant le rabattement;  $\alpha_1\beta_1$  est rabattu en  $A$  par la règle du triangle rectangle; l'angle cherché est  $\hat{A}b_1c_1$ .

Si on veut la bissectrice de cet angle, on la trace sur le rabattement en  $Az$  et on la relève.

Signalons que :

si l'une des droites est horizontale, elle est charnière;

si l'une des droites est verticale ou si elles ont leurs projections confondues (281), on a à effectuer un rabattement de plan vertical.

Faire les épreuves.



FIG. 239.

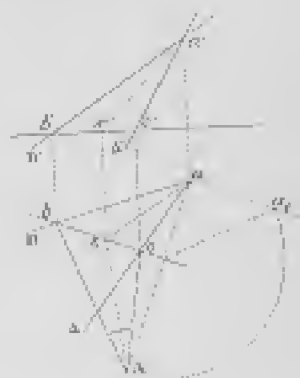


FIG. 240.

C'est ainsi qu'on procède, en particulier, pour avoir l'angle d'une droite avec le plan horizontal (15).

**II. Géométrie descriptive.** — Sur la fig. 240, les deux droites s'appellent  $DD'$  et  $\Delta\Delta'$ ; leur point commun est  $aa'$  et la charnière  $bb'b'$ ; les points  $bb'$  et  $cc'$  ne hontent pas pendant le rabattement;  $aa'$  est rabattu en  $A$  par la règle du triangle rectangle; l'angle cherché est  $\delta\Delta c$ .

Si on veut la bissectrice de cet angle, on la trace sur le rabattement en  $A$  et on la relève.

Signalons que :

si l'une des droites est horizontale, elle est charnière;

si l'une des droites est frontale, on rabat sur son plan de front ou la prenant pour charnière;

si les deux droites sont dans un même plan vertical ou de bout (projections correspondantes confondues), on rend leur plan parallèle à un plan de projection par un changement de plan, une rotation ou un rabattement (faire les épreuves).

## 204. — Angle d'une droite et d'un plan.

On appelle angle d'une droite  $D$  et d'un plan  $P$  (fig. 241) l'angle aigu  $\varphi$  que fait cette droite avec sa projection sur le plan.

Dans le cas particulier où le plan  $P$  est un plan de projection, on



FIG. 241.



FIG. 242.

utilise directement cette définition pour déterminer l'angle  $\varphi$ ; en géométrie cotée, on procède par calcul ou rabattement (13-1); en géométrie descriptive, on rend le plan  $AIB$  parallèle à un plan de projection par changement de plan, rotation ou rabattement. Sur la figure 242, on a obtenu l'angle de la droite  $aba'b'$  avec le plan frontal par une rotation d'axe de bout. — Le changement de plan a déjà été employé au n° 103 et le rabattement aux n° 141 et 200.

Dans le cas général, on remarque que l'angle  $\varphi$  est le complément de l'angle aigu  $\theta$  de la droite  $D$  avec une perpendiculaire  $AI$  au plan  $P$ . On est ainsi ramené au problème précédent : angle de deux droites.

Faire les épreuves.

Traiter aussi, à titre d'exercice, le cas où le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection.

**205. Problème.** — *Mené par un point  $aa'$  une droite  $aba'b'$  faisant avec le plan horizontal et le plan frontal des angles donnés  $\gamma$ ,  $\beta$ .*

Supposons le problème résolu (fig. 243). Construisons l'angle de la droite :

1° avec le plan horizontal par une rotation autour de la verticale du point  $aa'$ ;  $bb'$  vient en  $BB'$ ; l'angle cherché est  $a'AB' = \gamma$ ;

2° avec le plan frontal par une rotation autour de la droite de bout du point  $aa'$ ;  $bb'$  vient en  $B_1B_1'$ ; l'angle cherché est  $B_1a'B_1' = \beta$ .

Remarquons que ces constructions donnent l'une et l'autre la vraie grandeur du segment  $aba'b'$  en  $a'B'$  et  $aB_1'$ ; le point  $b'$  étant quelconque sur la droite inconnue, cette longueur peut être choisie arbitrairement. Ce choix

étant fait, on est en mesure de résoudre le problème posé; on construit les deux triangles rectangles  $aB_1$  et  $aB_2$  connaissant l'hypoténuse et un angle. Pour marquer le point  $b$ , on remarque que sa distance à la droite  $a$  est connue (c'est  $aB_1$ ) ainsi que sa distance au point  $a$  (c'est  $aB_2$ );  $b$  est donc à l'intersection des lieux suivants :

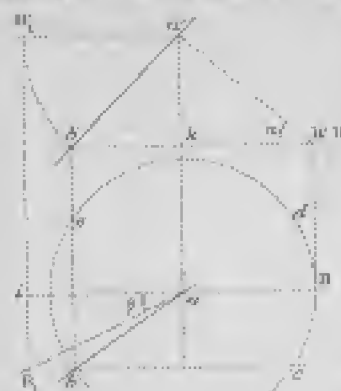


FIG. 243.

1° deux parallèles à  $aB$  à la distance  $aB_1$ ;

2° le cercle de centre  $a$  de rayon  $aB_2$ .

Dans le cas de la figure, ces lieux se coupent en 4 points  $b, c, d, e$ , ce qu'on rappelle dans le plan horizontal  $ll'$ .

Discussion. — Chaque parallèle coupe le cercle si sa distance au centre est inférieure au rayon :

$$aB_1 < aB_2$$

ou, en appelant  $l$  la longueur de l'hypoténuse des deux triangles rectangles  $aB_1$  et  $aB_2$  :

$$l \sin \beta < l \cos \alpha$$

$$\sin \beta < \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles aigus

$$\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

En résumé :

- |    |                                  |  |
|----|----------------------------------|--|
| 1° | $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ | 4 solutions.                               |
| 2° | $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ | 2 solutions (doubles) : droites du profil. |
| 3° | $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ | aucune solution.                           |

### Angle de deux plans.

206. — Si on veut seulement la grandeur de l'angle de deux plans  $P$  et  $Q$  (fig. 244), on leur mène d'un point quelconque  $A$  les perpendiculaires  $AB, AC$ . L'angle aigu de ces deux droites est l'angle aigu des deux plans. On est ramené au problème 203.

La plus souvent, on désire un rectiligne lui-même, puis sa vraie

grandeur et, le cas échéant, le plan bissecteur du dièdre correspondant (fig. 245). Nous allons indiquer comment on réalise ces



FIG. 244.



FIG. 245.

constructions au moyen d'une suite d'opérations dont chacune est l'application d'un problème antérieurement étudié.

1. **Géométrie cotée.** — Soit les plans  $P, Q$  donnés par leurs échelles de pente (fig. 246).

1° **Intersection des deux plans :**  $a_1b_1$ .

2° **Plan du rectiligne.** On choisit un point de l'intersection comme sommet du rectiligne,  $a$  par exemple, et on construit le plan  $R$  perpendiculaire en  $a_1$  à  $a_1b_1$ .

3° **Côtés du rectiligne.** — Ce sont les intersections du plan  $R$  avec les plans  $P$  et  $Q$ ; le point  $a_2$  appartient à chacune de ces intersections; on obtient un deuxième point sur l'une et l'autre au moyen des horizontales de cote 2 (points  $a_1c_1$ ).

4° **Vraie grandeur du rectiligne.** — Rabattement autour de l'horizontale  $a_1c_1$ ; les points  $a_2$  et  $b_2$  ne bougent pas; on construit le rabattement  $A$  du sommet  $a_1$  par le règle du triangle rectangle; noter que la perpendiculaire à la charnière est toute tracée en  $ab$ , de sorte que  $A$  est sur  $ab$ . La vraie grandeur du rectiligne est  $Aa_2$ .



FIG. 246.

5° *Plan bissecteur du dièdre.* — On trace la bissectrice  $As$  du rectiligne rabattu  $aAe$ ; elle a pour relevement  $a_2s_2$ ; le plan bissecteur est  $a_2b_2c_2$ .

REMARQUE. — Le cas particulier où les échelles de pente des deux plans ont des projections parallèles a déjà été traité au n° 35.

II. *Géométrie descriptive.* — Soit les plans  $P_aQ'$ ,  $R\delta S'$ , donnés par leurs traces (fig. 247).

1° *Intersection des deux plans :  $mna'n'$ .*

2° *Plan du rectiligne.* — On choisit son sommet  $aa'$  sur l'intersection; on construit le plan perpendiculaire à  $mna'n'$  en dirigeant la construction de manière à obtenir sa trace horizontale  $T$ ; on mène d'abord la frontale  $afa'f'$  dont on marque la trace

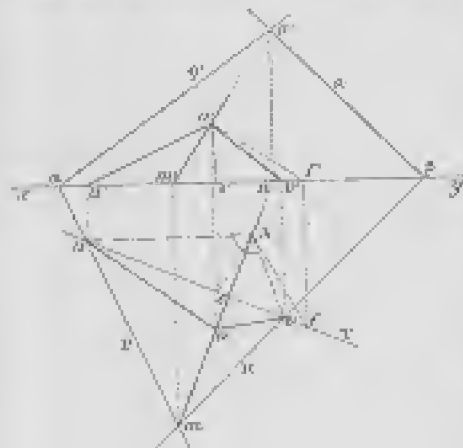


FIG. 247.

horizontale  $ff'$ ; la perpendiculaire menée de  $f$  à  $mn$  est la trace  $T$  cherchée.

3° *Côtés du rectiligne.* — On joint les intersections du plan du rectiligne avec les plans donnés; le point  $aa'$  appartient à chacune de ces intersections; on élève un deuxième point sur l'une et l'autre en prenant les points  $aa'$ ,  $aa'$  communs aux traces horizontales.

4° *Vraie grandeur du rectiligne.* — Rabattement autour de l'horizontale  $mna'n'$ ; les points  $aa'$ ,  $aa'$  ne bougent pas. On construit le rabattement  $A$  du sommet  $aa'$  au moyen de la frontale  $afa'f'$ ; noter que la perpendiculaire à la charnière issue de  $a$  est toute tracée en  $aa'$ , de sorte que  $A$  est sur  $aa'$ . La vraie grandeur du rectiligne est  $aAa$ .

5° *Plan bissecteur du dièdre.* — Comme en géométrie catée.

207. *Cas particulier.* — L'intersection des deux plans est parallèle à un plan de projection.

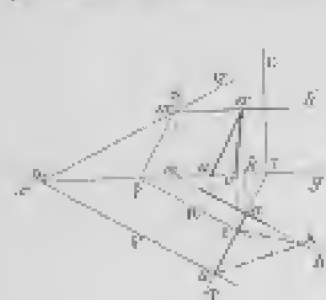


FIG. 248.



FIG. 249.

Il en est ainsi quand les plans donnés ont deux traces de même nom parallèles (fig. 248 et 249). Le plan  $TyL'$  du rectiligne peut être figuré immédiatement car il est vertical ou de bout. On termine comme dans le cas général. Sur la figure 249, on a légèrement modifié le tracé en opérant par rotation autour de la trace  $T$  du plan du rectiligne.

208. *REMARQUE.* — Nous avons déjà indiqué comment on cherche l'angle d'un plan avec le plan horizontal (33, 139, 154). Si on veut, en géométrie descriptive, l'angle d'un plan avec le plan frontal de projection, on rend le rectiligne de leur dièdre parallèle à un plan de projection par changement de plan, rotation ou rabattement. Sur la figure 250, on a opéré par rotation autour de la trace horizontale  $T$ .

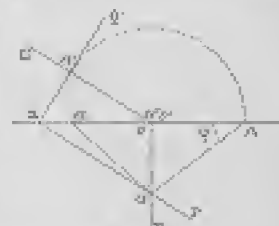


FIG. 250.

Construire un trièdre connaissant les trois faces.

249. — Nous devons supposer (G. É. n° 148 et 151) que la plus grande face est inférieure à la somme des deux autres et que la somme des faces est inférieure à  $4^\circ$ .

Prenons comme plan horizontal le plan de la plus grande face  $BSC$  et supposons les autres faces rabattues en  $BSA$ ,  $CSA$ , sur le plan



horizontale), extérieurement à la première (fig. 251). Nous allons chercher la projection et la cote d'un point  $A$  de l'arête  $SA$ . Un tel point se rabat en  $A_1$  (charnière  $SB$ ) et en  $A_2$  (charnière  $SC$ ) à des

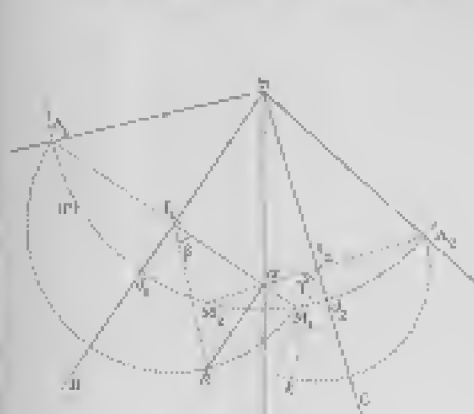


FIG. 251.

distances  $SA_1 = SA_2$ , toutes deux égales au segment  $SA$  de l'espace : les points  $A_1$  et  $A_2$  sont donc sur un cercle  $\Gamma$  de centre  $S$ .

La projection horizontale du point  $A$  se fait sur les perpendiculaires menées des rabattements  $A_1$  et  $A_2$  aux charnières respectives, soit en  $a$ . Quant à la cote, on l'obtient en  $ak$  par la règle du triangle rectangle; on peut la porter soit au-dessus, soit au-dessous du plan horizontal, d'où deux trièdres symétriques l'un de l'autre.

**Discussion.** — On pourra construire la cote si  $I_1A_1$  est inférieur à  $I_1A_2$ .

Or, si on rabat les faces  $BSC$  et  $CSC$  de façon à recouvrir la face  $BSC$ , les rabattements du point  $A$  se ferment en  $M_1$  et  $M_2$  dans l'angle  $BSC$  (qui est la plus grande face), et les arcs  $I_1M_1$  et  $I_1M_2$  chevaucheraient (la face  $BSC$  étant inférieure à la somme des deux, autres). Il en résulte que les cordes  $A_1M_1$  et  $A_2M_2$  du cercle  $\Gamma$  se coupent à l'intérieur de ce cercle.  $I_1a$  est donc inférieur à  $I_1A_1$  : la construction de la cote de  $A$  est possible<sup>1</sup>.

1. Refaire la figure en supposant que certaines des faces données sont des angles obtus : dans tous les cas, les conditions énoncées sont suffisantes pour que la construction soit possible.

Il faut observer que la construction faite à partir du rabattement  $A_1$  fournit la même cote; on a en effet :

$$\overline{ak}^2 = -\overline{aA_1} \times \overline{aM_1}; \quad \overline{ak}^2 = -\overline{aA_2} \times \overline{aM_2}$$

et les seconds membres sont égaux (puissance de  $a$  par rapport à  $\Gamma$ ).

En résumé, si 3 angles satisfont à la double condition rappelée au début, on peut construire deux trièdres symétriques l'un de l'autre, ayant pour faces ces trois angles.

### 210. — Détermination des dièdres.

1° *Dièdre d'arête SB.* On en a un rectiligne en  $\beta$ , dans le triangle rectangle précédemment construit.

2° *Dièdre d'arête SC.* On en a de même un rectiligne en  $\gamma$ .

3° *Dièdre d'arête SA.* Prenons comme plan frontal de projection le plan vertical contenant  $SA$  (fig. 252); la projection frontale de  $SA$  est  $Sa'$  ( $aa' =$  cote de  $A$ ); le plan du rectiligne cherché est le plan de bout  $a'm'$ , dont la trace horizontale coupe en  $x$  et  $y$  les arêtes  $SB$  et  $SC$ . Ce rectiligne a pour projection horizontale  $ax$  (qu'il est inutile de tracer) et il est rabattu en  $ax''$ .



FIG. 252.

## LIVRE IV

PROBLÈMES SIMPLES  
SUR QUELQUES SOLIDES USUELS

## CHAPITRE I. — POLYÈDRES USUELS

**211. Ponctuation.** — Nous avons déjà signalé (103) qu'on punctue la projection d'un objet en supposant l'observateur placé extrêmement loin du plan de projection dans la direction normale à ce plan; les rayons visuels de cet observateur sont des projectantes et l'aspect de l'objet se confond avec sa projection; on représente les parties vues en trait continu et les parties cachées en points ronds (fig. 253).



FIG. 253.



FIG. 254.

Si cet objet est, par exemple, un polyèdre convexe, un rayon visuel le rencontre en deux points M, P dont l'un M, situé du côté de l'observateur, est vu et l'autre caché. L'ensemble des faces vues est séparé de l'ensemble des faces cachées par le contour apparent dont la projection limite, sur l'épure, la région où se projettent les points du solide. Les arêtes du contour apparent sont toujours vues. Une arête quelconque est entièrement vue ou bien entièrement cachée.

**Exemple.** — La figure 254 représente la projection cotée d'un tétraèdre; la ponctuation se comprend aisément.

**212. Représentation d'un cube.**

**Problème.** — Représenter un cube ayant une diagonale verticale, coupé par le plan horizontal du centre.

Avant d'abord représenté le cube avec ses faces parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection (fig. 255, (épure 2y)) nous avons rendu la diagonale AGA'G' de front par un changement de plan frontal (épure  $x_1y_1$ ); nous l'avons ensuite rendue verticale par un changement de plan horizontal (épure  $x_2y_2$ ).

On retrouve graphiquement les propriétés suivantes, qu'il est facile d'établir géométriquement :

Le contour apparent est un hexagone régulier;

la section par le plan médiateur d'une diagonale est un hexagone régulier (elle n'est pas tracée sur l'épure);

une diagonale est axe de symétrie ternaire (coïncidence par rotation de  $\frac{2\pi}{3}$ ).

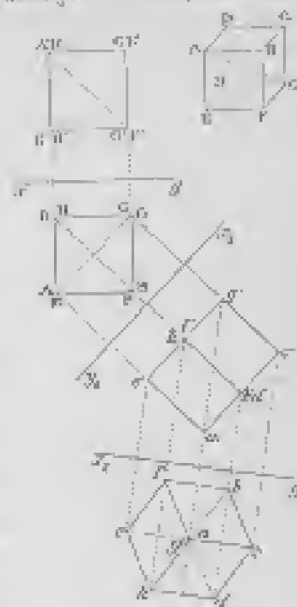


FIG. 255.

**213. — Intersection d'un prisme et d'une droite.**

**Problème.** — La base d'un prisme droit est donnée par son plan d'échelle de pente P et sa projection (fig. 256).

1° Représenter ce prisme connaissant la longueur l de ses arêtes latérales;

2° Trouver les points d'intersection de ce prisme avec une droite D.

La construction habituelle donne l'intervalle gh des arêtes latérales qui sont, par hypothèse, perpendiculaires au plan P. La longueur donnée l (non figurée) vaut  $GH < l$ ; la cote du sommet A est donc H.G.

Pour construire les points où la droite D perce le prisme, on fait passer par cette droite un plan auxiliaire dont l'intersection avec le

prisme s'obtienne commodément; c'est le plus souvent le plan parallèle aux arêtes; il est défini sur l'épure par la parallèle aux arêtes issue du point  $l_1$  de la droite  $D$ ; il coupe la surface latérale du prisme suivant deux parallèles aux arêtes, que l'on a déduites des points  $u, v$  où le polygone de base est coupé par l'intersection  $l_1$  du

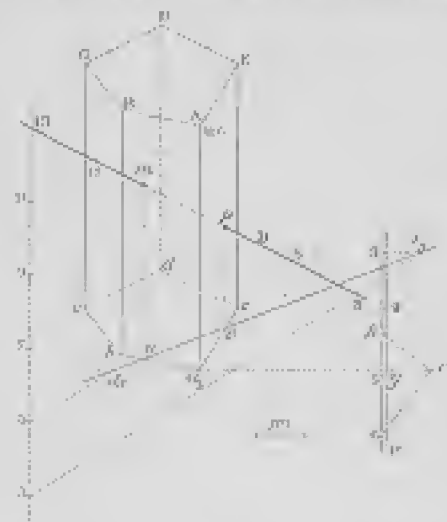


FIG. 236.

plan auxiliaire et du plan de base. Les deux parallèles aux arêtes issues de  $u$  et  $v$  coupent la droite  $D$  aux points  $m$  et  $p$  cherchés; on déterminera aisément leurs cotes au moyen de la graduation de la droite  $D$ .

214. REMARQUE. — La même méthode s'emploie pour chercher les points où une droite rencontre une pyramide; on prend alors comme plan auxiliaire le plan passant par la droite et le sommet de la pyramide.

#### 215. — Section plane d'une pyramide.

Problème. — Une pyramide est donnée par son sommet  $ss'$  et sa base, située dans un plan de base  $P \times Q'$  (fig. 237); construire son intersection avec un plan défini par sa trace horizontale  $T$  et un point  $mm'$  de l'arête  $ss'a'$ .

Cherchons d'abord l'intersection du plan sécant et du plan de base. Un premier point de cette droite est  $aa'$ , commun aux traces horizontales des deux plans. Pour en obtenir un deuxième, on prend une

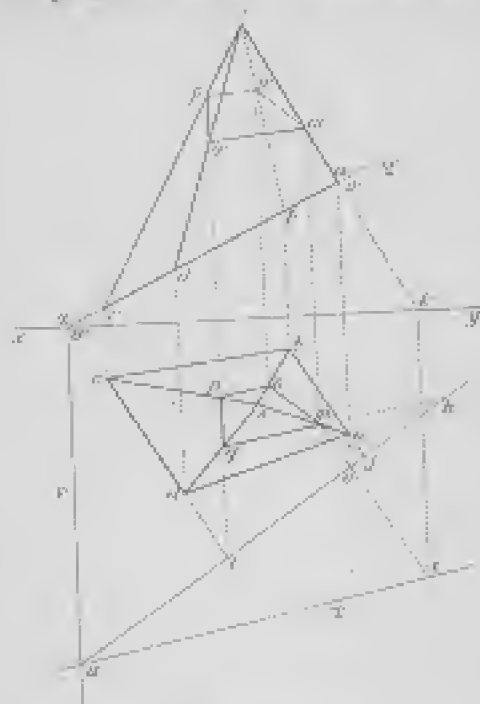


FIG. 237.

droite  $m'm'$  dans le plan sécant et on marque le point  $m'$  où elle perce le plan de base  $P \times Q'$ .

Cherchons maintenant l'intersection du plan sécant avec la face  $sab'a'b'$ ; un premier point est  $ma'$ ; l'autre s'obtient en prenant pour plan auxiliaire le plan de base  $P \times Q'$ ; sa projection horizontale est en  $j$  sur  $ab$  et  $m'$  ayant ainsi un premier côté  $m'm'$  de l'intersection, on opère de même pour avoir  $mq$ , puis  $pq$  (au moyen des points  $k, l$  de  $au$ ). On termine en rappelant  $mnpq$ .

**216. Rectangles.** — Cette méthode est générale et s'applique également à la recherche de la section plane d'un prisme; elle nécessite la construction préalable d'un sommet  $m'm'$  de la section plane et de la droite  $m'm'e'$  d'intersection du plan sécant et du plan de base.

## CHAPITRE II. — LA SPHÈRE

**217. Représentation de la sphère.** — **Contour apparent.** L'observateur étant placé, comme il a été dit, à l'infini sur une projectante, un rayon visuel est porté par une projectante et peut rencontrer la sphère en deux points A, B (fig. 258). Le point A qui est du côté de l'observateur est vu et l'autre, B, est caché. Il y a ainsi sur la sphère une région vue et une région cachée; elles sont séparées par le grand cercle de contact du cylindre circonscrit ayant pour génératrices des projectantes. Ce grand cercle s'appelle **contour apparent**.

En géométrie cotée, on représente une sphère par les projections cotées de son centre et de son contour apparent (fig. 259). Leur cote est la même.



FIG. 258.



FIG. 259.



FIG. 260.

En géométrie descriptive, on représente une sphère par les projections de son centre et de chacun de ses contours apparents (fig. 260).

**218. Parallèles et méridiens.** — On appelle **parallèles** les cercles de section de la sphère par des plans parallèles à un plan de projection; ils se projettent sur ce plan en vraie grandeur suivant des cercles concentriques à la projection du contour apparent.

On appelle **méridiens** les grands cercles de section de la sphère

par des plans diamétraux perpendiculaires à un plan de projection.

**219. Problème.** — Construire la projection horizontale d'un parallèle de cote donnée d'une sphère.

Il suffit d'en construire un point. On l'obtient, en géométrie cotée (fig. 261) par le rabattement du plan V d'un méridien vertical sur le plan horizontal du centre. Le rabattement du méridien coïncide avec le contour apparent; l'horizontale de cote 6 (cote donnée) du plan V se rabat suivant une parallèle à la droite V à la distance  $6 - 4,5 = 1,5$ . L'un des points M où elle coupe le contour apparent est sur le parallèle cherché; on achève en le relevant en  $m_p$ .

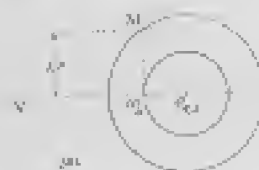


FIG. 261.

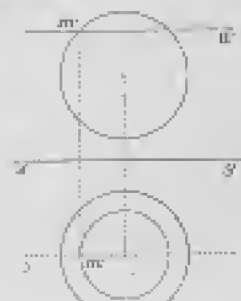


FIG. 262.

En géométrie descriptive (fig. 262), on marque aisément l'un des points  $m'm'$  de rencontre du plan horizontal  $H'$  de cote donnée avec le contour apparent frontal.

Le tracé corrélatif permet d'obtenir la projection frontale du parallèle d'éloignement donné (faire l'épure).

**220. Problème.** — I. **Géométrie cotée.** Connaissant la projection  $m$  d'un point d'une sphère, trouver sa cote et construire le plan tangent en ce point (fig. 263).

On rabat le méridien vertical V contenant le point cherché; son rabattement coïncide avec le contour apparent et donne le rabattement M du pt. Si  $OM = 1,2$ , la cote du pt est  $2 + 1,2 = 3,2$  ou  $2 - 1,2 = 0,8$ . Il y a deux solutions.

Le plan tangent au point  $m_{1,2}$  est défini par les tangentes  $m_{1,2}t_1$  et  $m_{2,2}t_2$  au parallèle et au méridien du point  $m_{1,2}$ . Cette dernière droite  $m_{2,2}t_2$  a été obtenue à l'aide de son rabattement  $M_2$ ; elle est l'achèvement de la tangente au plan tangent.

II. — **Géométrie descriptive.** — Connaissant l'une des projections  $m$  d'un point d'une sphère, construire l'autre projection et le plan tangent en ce point.

Sur la figure 264, on a utilisé le parallèle de front passant par le point donné. Sur la figure 265, on a rabattu, comme en géométrie cotée, le

méridien vertical passant par le point donné ( $aa'$  =  $aa'$ ) dans les deux cas, il y a deux solutions; nous avons choisi le point  $aa'$  en projection horizontale.

Le plan tangent est perpendiculaire au  $mo'$  au rayon  $oa'$  ( $aa'$ ); il est défini par une horizontale  $ab'$  et une frontale  $af'$  ( $aa'$  et  $af'$  sont,  $af'$  et  $ab'$ ).

### 221. Problèmes sur les plans tangents

Construire les plans tangents à une sphère parallèles à un plan donné P.

On mène le diamètre perpendiculaire au plan P et on cherche ses

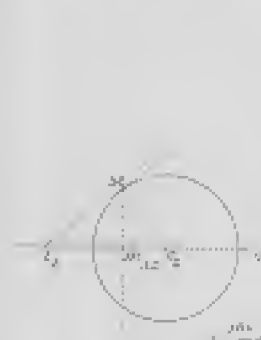


FIG. 263.



FIG. 264.



FIG. 265.

extrémités en relevant son plan projetant sur le plan du contour apparent.

En géométrie usée (fig. 266), on figure d'abord le plan vertical V projetant le diamètre perpendiculaire au plan P, puis on le rabat sur le plan de contour apparent; les points de contact A, B, sont sur le diamètre perpendiculaire au rabattement MN de l'intersection  $o_1n_1$  des plans V et P. On termine en relevant les points A et B (il reste, sur la figure 266, à chercher leurs cotés).

En géométrie descriptive la marche est la même; sur la fig. 267, le plan donné est défini par une horizontale  $DD'$  et une frontale  $DD''$ .

II. — Construire les plans tangents à une sphère lésés d'une droite donnée D.  
Soit I le point de rencontre de la droite D avec le plan diamétral qui lui est perpendiculaire (fig. 268); on cherche les points de contacts A, B des tangentes issues de I au grand cercle contenu dans ce plan diamétral (rabattement sur le plan du contour apparent); ce sont les points de contact des plans tangents cherchés.

En géométrie usée (fig. 269) on construit le plan P issu de  $o_1$  et perpendiculaire à la droite D; on cherche ensuite son point d'intersection  $o_2$  avec cette droite; on rabat ce plan autour de l'horizontale de côté A, laquelle passe par le centre; on trace les tangentes issues de I au grand cercle rabattu et on relève leurs points de contact A, B en  $a, b$  au moyen des points traces  $A, B$  de la charnière; on termine en cherchant les cotés des points  $a, b$ ,

En géométrie descriptive (fig. 270) le plan diamétral perpendiculaire à DD' est  $aa'p'$  et son pied est  $p'$ ; on rabat ce plan autour de  $aa'a'$ ;  $p'$  vient en  $l$  (sègle du triangle rectangle); on trace les tangentes  $la, lb$  au



FIG. 266.



FIG. 267.

grand cercle rabattu et on termine comme en géométrie usée (relevement de A et B par recouvrements).

### 222. Intersection d'une droite et d'une sphère.

Pour déterminer les points de rencontre d'une droite D et d'une sphère, on fait passer par la droite un plan auxiliaire, par exemple le plan diamétral, et on rabat ce plan sur le plan de contour apparent; le grand cercle de section a pour rabattement le contour apparent; il est coupé par le rabattement de la droite aux points cherchés A, B; on termine en relevant ces points.

En géométrie usée (fig. 271), la droite donnée D est définie par les points  $o_1, p_1$ ; la charnière est  $o_1p_1$ ; le point  $o_1$  reste immobile; le point  $p_1$  est rabattu en  $l$  au moyen du triangle rectangle  $o_1p_1l$ .

En géométrie descriptive (fig. 272), la droite donnée est DD'; la charnière est  $aa'p'$ ; le point  $p'$  reste immobile; le point  $aa'$  est rabattu en  $l$  au moyen du triangle rectangle  $aa'p'l$ .

Exercice. — Soient ces deux en prenant pour plan auxiliaire le plan vertical (on se rabat projetant la droite). On verra l'avantage de la méthode précédente, dans laquelle le cercle rabattu est tout tracé.

Section plane d'une sphère.

223. Méthode. — 1° Pour obtenir les axes de la projection, on détermine d'abord le centre et le rayon de la section plane à l'aide du plan diamétral vertical (ou du bout) perpendiculaire au plan sécant; il est plan de symétrie

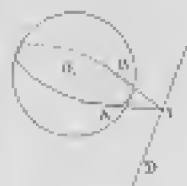


Fig. 265.



Fig. 266.

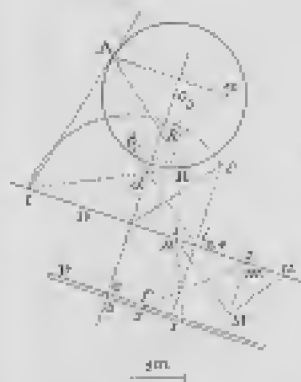


Fig. 269.



Fig. 271.

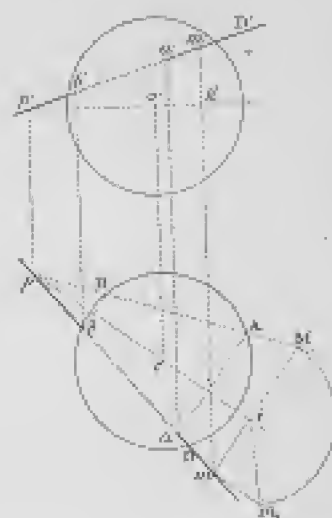


Fig. 272.



Fig. 273.



Fig. 274.

pour toute la figure et en particulier pour la section plane; on le rabat sur le plan de contour apparent horizontal (ou frontal). On construira comme il a été indiqué précédemment (n° 196).

2° Pour obtenir un point quelconque de la section plane et la tangente, on coupe la sphère et le plan sécant par un plan auxiliaire horizontal (ou de front); élevés des points communs au cercle et à la droite obtenus est sur la section plane; la tangente à cette section plane en ce point est l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan sécant.

224. Géométrie cabée. — Sur la figure 273, le plan diamétral vertical perpendiculaire au plan donné d'échelle de pente P est V; l'intersection des deux plans est  $ij_2$ , rabatton en  $l$  sur le plan de contour apparent; le méridien contenu dans le plan V a pour rabattement le contour apparent; la corde  $AB$  découpée par ce cercle sur  $l$  est un diamètre de la section plane (celui qui est porté par une ligne de pente); le milieu  $O$  de  $AB$  est

le centre de la section plane et son rayon est  $OA$ ; le rabattement  $oa$  du  $O$  est le centre de la projection de la section plane.

Rappelons que les relevements  $a'$ ,  $b'$  de  $A$  et  $B$  sont les sommets du petit axe de cette projection.

Sur la figure 274, on a coupé le plan vertical  $P$  et la sphère par le plan horizontal  $H$  de cote  $a_4$ ; le rabattement du plan  $V$  (utilisé à l'alinéa précédent) sur le plan de contour apparent donne d'un part le point  $a_{2,4}$  de l'horizontale commune aux plans  $P$  et  $H$  et d'autre part le point  $a_{3,4}$  du parallèle contenu dans le plan  $R$ . L'un des points communs à cette droite et  $A$  et cercle est  $m_{3,4}$ ; c'est un point de la section plane.

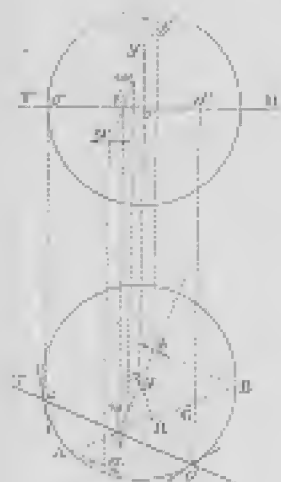


FIG. 273.

Pour obtenir la tangente en ce point, on a construit l'échelle de pente  $T$  du plan tangent à la sphère en  $m_{3,4}$ ; on plan est perpendiculaire au rayon  $am_{3,4}$  ou  $bm_{3,4}$ ; le rabattement du plan vertical de trace  $T$  sur le plan horizontal de cote 4 a fourni les points de cote 4 et 5 de cette échelle de pente; les horizontales de cote 5 des plans  $P$  et  $T$  donnent le point  $t_4$  de la tangente en  $a_{3,4}$  à la section. — Un point aussi cherché, comme au n° 250, 1, la trace du plan tangent sur le plan horizontal du centre; l'intersection de cette trace et de l'horizontale de cote 4 du plan  $P$  est un point de la tangente cherchée.

La même méthode donne les points  $c$ ,  $d$  de la section situés sur le contour apparent; le plan tangent à la sphère étant vertical, les projecteurs



FIG. 274.

de la section plane et du contour apparent ont même tangente en chacun de ces points.

225. Géométrie descriptive. — Pour simplifier les tracés, on a supposé le plan secant défini par sa trace  $TT'$  sur le plan de contour apparent horizontal et son point  $gg'$  d'intersection avec la verticale du centre de la sphère.

Sur la figure 275, on a encore rabattu le même plan  $V$  sur le plan  $H'$  de contour apparent horizontal; son intersection avec le plan vertical a pour rabattement  $gg'$ ; le méridien contenu dans le plan  $V$  a pour rabattement le contour apparent horizontal; la corde  $AB$  de ce cercle projeté par la droite  $gg'$  est un diamètre de la section plane; le milieu  $O$  de  $AB$  est le centre de la section plane et son rayon est  $OA$ ; le relevement  $aa'$  de  $A$  donne le centre de la section plane.

Rappelons que les relevements  $aa'$ ,  $bb'$  de  $A$  et  $B$  sont les sommets du petit axe de la projection horizontale de la section; les tangentes en ces points sont horizontales.

Sur la figure 276, le plan auxiliaire horizontal  $H'$  coupe le plan donné suivant l'horizontale  $aa'$  et la sphère suivant le petit cercle passant par  $aa'$ ; on obtient ainsi le point  $aa'$  du contour apparent; le plan tangent à la sphère en ce point est perpendiculaire au rayon  $aa'$ , c'est-à-dire qu'il a marqué successivement sa frontale  $aa'$  ( $m'a'$  à  $a'a'$ ); le point  $ab'$  trace de cette droite sur le plan  $H'$  et la droite  $bb'a'$  trace du plan tangent sur le plan  $H'$  ( $bb'a'$  ou  $a'$ ); cette droite rencontre  $TT'$  en un point  $bb'$  qui appartient à la tangente en  $aa'$  à la section plane.

Les points  $aa'$  et  $bb'$  (fig. 275) commencent à la droite  $TT'$  et au contour apparent horizontal appartenant à la section plane; les plans tangents à la sphère en  $aa'$ ,  $bb'$  étant verticaux, la projection horizontale de la section est tangente au contour apparent horizontal en  $a$  et  $b$ .

Chercher, à titre d'exercice, les points sur le contour apparent frontal.

## EXERCICES ET PROBLÈMES

## Les Figures élémentaires en géométrie cotée.

1. — On donne les projections cotées des sommets d'un triangle; trouver celle du point de rencontre des médianes.
2. — On donne les projections cotées des sommets ABC d'un quadrilatère plan et la projection du 4<sup>e</sup> sommet D; trouver sa cote.
3. — Trouver la cote du point de rencontre de deux droites dont les projections sont cotées: 1<sup>re</sup> par une construction; 2<sup>e</sup> par le calcul.
4. — Par un point donné mener une droite de pente donnée qui rencontre:
  - 1<sup>re</sup> soit une droite donnée D. Cas particuliers: D est verticale; D est horizontale.
  - 2<sup>e</sup> soit un cercle donné dans le plan horizontal.
5. — On donne deux points A, B du plan horizontal et la projection graduée d'une droite  $\Delta$ ; trouver sur cette droite un point M, tel que le rapport des segments MA et MB ait une valeur donnée k. — Cas particulier:  $k = 1$ .
6. — Par un point donné mener une droite de pente connue p parallèle à un plan donné par son échelle de pente.
7. — Étant donné deux points A, B et une droite D, mener par la droite un plan dont A et B soient équidistants. (Deux cas, suivant que le plan laisse, ou non, les deux points d'un même côté.)
- Application. — Trouver un plan dont 3 points donnés A, B, C soient équidistants.
8. Généralisation. — Étant donné deux points A, B et une droite D, mener par la droite un plan tel que le rapport des distances de A et B à ce plan ait une valeur donnée.
- Application. — Trouver un plan tel que les distances de ce plan à 3 points donnés A, B, C soient proportionnelles à des nombres donnés.
9. — Chercher l'intersection de deux plans dont les horizontales de même cote se coupent en dehors de l'épure.
10. — Par une droite donnée, faire passer un plan qui coupe un plan donné P suivant une horizontale. (On se donne le plan P par son échelle de pente.)
11. — Par un point donné mener une droite s'appuyant sur deux droites données.
12. — Par un point donné mener une droite de direction donnée s'appuyant sur deux droites données.
13. — Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée:
  - 1<sup>re</sup> la droite donnée est horizontale, le plan est quelconque
  - 2<sup>e</sup> le plan donné est vertical, la droite est quelconque.
14. — Étant donné une droite D et une horizontale H, trouver un segment horizontal de longueur donnée dont les extrémités appartiennent respectivement à ces deux droites.

15. — Déterminer le plan symétrique d'un plan donné P relativement à un point donné Q.

16. — Étant donné deux plans P et Q, trouver un segment horizontal dont les extrémités appartiennent respectivement à ces deux plans et dont le milieu soit un point donné Q.

## Ombres.

17. — Lorsqu'un rayon lumineux rencontre un point M, puis une surface opaque, le plan horizontal de comparaison par exemple, en un point p, on dit que p est l'ombre de M. — ombre au tableau et la source lumineuse S est à distance finie (fig. 277), ombre au sol et si les rayons lumineux sont parallèles à une direction L (fig. 278).



FIG. 277.



FIG. 278.

Dans le cas de l'exemple, p est la trace du rayon lumineux (p n'est physiquement l'ombre de M que si le rayon lumineux rencontre M avant p). L'ombre d'une ligne est la ligne formée par les différents points de cette ligne.

Ombre d'une droite sur un plan; c'est en général une droite, exceptionnellement un point.

Ombre d'un polygone sur un plan; elle est limitée par l'ombre du contour du polygone.

18. — Ombre au sol d'un parallélogramme ABCD (plaque opaque) sur le plan horizontal.

La projection du parallélogramme,  $a_1b_1c_1d_1$  (unité; voir) est un rectangle de 2<sup>me</sup> sur 3<sup>me</sup> ( $ab = 2^m$ ) et l'ombre du point A se fait au centre du rectangle obé.

19. — Ombre au flambeau d'un triangle ABC, obé est un triangle rectangle  $ab = 2^m$ ,  $ac = 3^m$ . On note  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ . Le point lumineux se projette en s, 4<sup>e</sup> sommet du rectangle dont a, b, c, sont 3 sommets, et il a pour cote 1<sup>re</sup>. Construire l'ombre portée sur le plan horizontal.

20. — On donne un quadrilatère ABCD situé dans un plan vertical V. Trouver l'ombre qu'il porte sur un plan P ayant même trace horizontale que le plan V (On donne P par son échelle de pente).

21. — Ensemble de 2 plaques opaques, l'une est un parallélogramme ABCD, l'autre un triangle EFG.

Q est le centre de la fenille, Qz est dirigé suivant le grand axe vers la droite,



On suivant la point axe vers le bas. Les sommets des plaques sont définis par les coordonnées  $x, y$  du leurs projections et leur cote : (tableau)

$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 7 \\ 8 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 10 \\ 8 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} K \\ F \\ G \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 8 \\ 0,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 6 \\ 1,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 10 \end{array} \right.$
--	--	--	---	--	--	--	---

Les rayons lumineux se projettent parallèlement à  $co$  et sont inclinés à  $45^\circ$  sur le plan horizontal, de haut en bas dans le sens  $co$ .

#### Droites et plans perpendiculaires.

Construire le symétrique d'un point :

22. —  $1^\circ$  par rapport à un plan donné;

23. —  $2^\circ$  par rapport à une droite donnée.

Mener par un point donné une droite orthogonale à une droite donnée et

24. —  $1^\circ$  qui soit parallèle à un plan donné;

25. — ou  $2^\circ$ , qui ait une pente donnée.

26. — Traverser sur une droite donnée un point équidistant de deux points donnés.

27. — Déterminer le lieu des points équidistants de 3 points donnés.

28. — On donne une droite  $D$  et un plan  $P$ . Par leur point d'intersection, mener dans le plan une droite perpendiculaire à  $D$ .

29. — On donne la projection d'un angle droit; l'un des côtés étant gradué, prolonger l'autre.

30. — On donne les projections de deux droites et la projection graduée de leur perpendiculaire commune : graduer les deux droites.

31. — Construire l'isobelle de pente du plan symétrique du plan horizontal par rapport à un plan donné.

### Les figures élémentaires en géométrie descriptive.

32. — L'unité étant le centimètre, représenter les points de coordonnées

$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=2,5 \\ z=3,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=-3,1 \\ z=+3,4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ y=+4,7 \\ z=-3,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{array} \right.$
A	B	C	D

33. — Trouver, sur une droite donnée, un point dont l'éloignement soit double de la cote.

34. — On considère deux droites  $D$  et  $\Delta$  telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune et la projection frontale de l'autre soient portées par la même droite. Ces droites sont-elles dans un même plan?

35. — Représenter un triangle ayant un côté horizontal et un côté de bout.

36. — Mener par un point

du  $2^\circ$  dièdre, une horizontale et chercher ses traces.

—  $2^\circ$  — frontale et chercher ses traces.

—  $3^\circ$  — droite de profil et chercher ses traces.

37. — Par un point donné, mener une droite de profil connaissant le rapport des distanciers de ses traces à la ligne de terre.

38. — On donne une droite par ses projections  $D, D'$ . Mener par un point donné une droite qui la rencontre en un point du  $2^\circ$  bissecteur.

39. — Mener par un point donné une horizontale et une frontale s'appuyant sur une droite donnée.

40. — Représenter un triangle  $ABC$ ,  $AB$  étant de front dans le  $1^\circ$  dièdre et  $C$  dans le  $4^\circ$  dièdre. Construire son intersection avec le plan horizontal; puis tracer ou supprimer le plan horizontal unique.

41. — On donne les projections de 3 sommets  $A, B, C$  d'un hexagone plan et la projection horizontale des autres sommets,  $D, E, F$ . Achèvement de l'hexagone.

42. — Représenter un parallélogramme ayant un côté horizontal et un côté de front.

43. — Construire une frontale, puis une droite quelconque, s'appuyant sur deux droites de bout et une droite quelconque donnée.

Construire un segment horizontal de longueur donnée dont les extrémités appartiennent respectivement à deux droites données  $D$  et  $\Delta$  :

44. — L'une des droites est verticale.

45. — Les deux droites ont leurs projections horizontales parallèles.

46. — Les deux droites sont concourantes.

47. — Les deux droites sont quelconques.

48. — Mener une droite de bout et une verticale s'appuyant sur deux droites données.

49. — On donne par ses projections un angle  $MAN$  d'un triangle  $ABC$ ; représenter le triangle sachant que le côté  $BC$  est porté par une frontale d'éloignement donné.

Construire une horizontale, une frontale, une droite quelconque, et les traces (si elles ne sont pas données) d'un plan :

50. — Le plan est défini par deux droites parallèles à  $xy$ .

51. — Le plan est défini par deux droites issues d'un point de  $xy$ .

52. — Le plan est défini par un point du plan horizontal et une droite quelconque.

53. — Le plan est défini par un point du  $2^\circ$  bissecteur et une frontale;

54. — Le plan est défini par deux droites dans les projections horizontales sont concourantes;

55. — Le plan est défini par une droite de profil et un point.

56. — Le plan a ses traces sur l'épure, portées par la même droite.

57. — Le plan est défini par deux droites telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune coïncide avec la projection frontale de l'autre.

58. — Le plan passe par un point donné  $co$ ; il est parallèle à  $xy$  et à une droite de profil donnée.

59. — Un plan est défini par deux droites concourantes. Quel est son repère? Est-il : de bout? vertical? parallèle à  $xy$ ? parallèle au  $1^\circ$  ou au  $2^\circ$  bissecteur?

Construire les traces d'un plan :

60. — Le plan est défini par une droite de profil rencontrant  $xy$  et un point quelconque.

61. — Le plan est défini par une droite du  $2^\circ$  bissecteur et un point du plan horizontal.

62. — Le plan est défini par un point dans le plan frontal, un point dans le plan horizontal et un point dans le 2<sup>e</sup> bissecteur.

63. — Démonstrer si une droite appartient à un plan défini par  $\alpha\gamma$  et un point  $\alpha\alpha'$ .

Mener par un point le plan parallèle à un plan donné.

64. — 1<sup>o</sup> défini par  $\alpha\gamma$  et un point; cas particulier : il s'agit du traceur du 2<sup>e</sup> dièdre.

65. — 2<sup>o</sup> dont les traces, sur l'épure, sont portées par la même droite.

66. — Par un point  $\alpha\alpha'$  du 1<sup>er</sup> dièdre, mener un segment ayant pour milieu ce point et dont les extrémités appartiennent respectivement au plan horizontal de projection et à une droite donnée dans le plan frontal de projection.

67. — On donne la projection horizontale d'un triangle ABC situé dans un plan  $\Pi\alpha Q'$  : le est parallèle à  $\alpha P$  et  $\alpha\delta = \alpha\epsilon$ . Construire la projection frontale. Que peut-on dire du triangle ABC?

Exemples d'intersection de deux plans.

68. — On connaît un point  $\alpha\alpha'$  de l'intersection; l'un des plans passe par  $\alpha\gamma$ , l'autre par une droite  $U\delta'$  du plan frontal de projection.

69. — L'un est défini par  $\alpha\gamma$  et un point  $\alpha\alpha'$ , l'autre par un point  $\beta\beta'$  de  $\alpha\gamma$  et une droite quelconque.

70. — On est donné par deux droites principales  $HI\delta'$  et  $FP'$ ; l'autre passe par un point  $\alpha\alpha'$  du second bissecteur et par une droite  $HI\delta'$  dont les projections sont confondues,  $\delta$  avec  $P$ , et  $\delta'$  avec  $P'$ .

71. — L'un est donné par ses traces  $\Pi\alpha Q'$ , l'autre par deux droites concourantes  $HI\delta'$  et  $\Delta\delta'$ ,  $\delta$  et  $\delta'$  étant respectivement confondues avec  $\alpha P$  et  $\alpha Q'$ .

72. — L'un est parallèle à  $\alpha\gamma$ ; l'autre est défini par  $\alpha\gamma$  et un point.

73. — L'un passe par  $\alpha\gamma$ ; l'autre a, sur l'épure, ses traces confondues.

74. — L'un est défini par ses traces; le deuxième par deux droites telle que la projection horizontale de chacune est confondue avec la projection frontale de l'autre.

75. — L'un est le 2<sup>e</sup> bissecteur; l'autre est défini comme au n<sup>o</sup> précédent.

76. — La trace horizontale de chacun et la trace frontale de l'autre sont portées, sur l'épure, par la même droite.

77. — Les deux traces de chacun sont portées, sur l'épure, par la même droite.

78. — On connaît la trace horizontale de l'un, la trace frontale de l'autre et un point de l'intersection.

79. — L'un est défini par un point  $\alpha\alpha'$  et une droite  $\Delta\delta'$  du second bissecteur, l'autre est défini par une ligne de pente (relative au plan  $HI$  issue de  $\alpha\delta'$ .

80. — Par une droite donnée faire passer un plan qui coupe un plan  $\Pi\alpha Q'$  suivant une frontale.

81. — Intersection de 3 plans : l'un est parallèle à  $\alpha\gamma$ ; un autre est défini par  $\alpha\gamma$  et un point; le 3<sup>e</sup> est de bout.

82. — On donne les projections  $\alpha\alpha'$  d'un point d'une droite  $AB$  et la projection horizontale  $\delta$  du point  $B$ . Achèver l'épure de façon que la droite soit parallèle à un plan donné.

83. — Étant donné deux plans, mener par un point de l'un une droite parallèle à l'autre.

84. — On donne, par leurs traces, deux plans parallèles à  $\alpha\gamma$ . À quelle condition ces deux plans sont-ils parallèles?

Exemples d'intersection d'une droite  $\Delta$  et d'un plan :

85. — La droite est horizontale; le plan est défini par  $\alpha\gamma$  et un point.

86. — La droite est frontale; les traces du plan sont, sur l'épure, portées par la même droite.

87. — Le plan est défini par un point  $A$  et une droite  $D$ ; la droite  $\Delta$  et chacune de ses projections confondues, sur l'épure, avec la projection de son contour de la droite  $D$ .

Mener par un point donné une droite s'appuyant sur deux droites données  $\delta$  et  $\delta'$  :

88. — L'une des droites est  $\alpha\gamma$ , l'autre est de profil;

89. —  $\delta$  et  $\delta'$  sont de profil.

90. — L'une est de profil, l'autre est dans le 2<sup>e</sup> bissecteur.

91. — Le point a ses projections confondues et les droites se trouvent chacune dans un des plans de projection.

Mener une droite de direction donnée  $L$  s'appuyant sur deux droites données  $\delta$  et  $\delta'$  :

92. — La droite  $\delta$  est verticale,  $\delta'$  est quelconque.

93. — La direction  $L$  est celle de  $\alpha\gamma$ ;  $\delta$  et  $\delta'$  sont quelconques.

Mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée :

94. — La droite donnée est  $\alpha\gamma$ ; le plan a, sur l'épure, ses traces confondues.

95. — Le plan est de bout, la droite est de profil.

96. — Le plan est un des plans de projection, la droite est de profil.

97. — Le plan est un des plans bissecteurs, la droite est quelconque (li<sup>e</sup> de plan).

98. — La droite est verticale, le plan est quelconque.

99. — Le plan est donné par ses traces, la droite est dans le second bissecteur.

100. — Le plan est un des bissecteurs, la droite est de bout.

101. — Étant donné un angle polyèdre convexe  $SABCD$  (défini, par exemple, sur l'épure, par son sommet  $S\alpha'$  et les traces horizontales des arêtes), le couper par un plan de façon que la section soit un parallélogramme.

Ombres. — Voir le n<sup>o</sup> 17 aux exercices.

102. — Le plan  $H$  étant supposé semi opaque, une figure  $(A)$  donnée sur lui une ombre  $(A_1)$ ; le plan  $F$  étant supposé semi opaque, la figure  $(A)$  donne sur lui une ombre  $(A_2)$ ; les ombres  $A_1$  et  $A_2$  coupent  $\alpha\gamma$  aux mêmes points.

Les deux plans  $H$  et  $F$  étant supposés opaques, l'ombre physique d'un corps placé dans le 1<sup>er</sup> dièdre comprend la partie de  $A_1$  placée en avant de  $F$  et la partie de  $A_2$  située au dessus de  $H$ ; cette partie de  $A_2$  s'appelle inversement de l'ombre sur le plan frontal.

103. — Ombre au soleil d'un segment AB. Le segment est situé dans le 1<sup>er</sup> dièdre, l'ombre du milieu I de AB se fait en un point  $I_1$  de  $xy$ . Les plans de projection sont supposés orthogonaux.

104. — Ombre au soleil d'un segment AB. Les points A et B et le point lumineux S sont donnés par leurs coordonnées (abscisse, éloignement, cote) en centimètres :

$$A(-2, 2, 4), \quad B(-2, 2, 0), \quad S(-2, 1, 5).$$

Chercher l'ombre portée sur le plan horizontal.

105. — Ombre au soleil d'une droite de profil sur les plans de projection. Application. On connaît une projection d'un point de la droite, trouver l'autre.

106. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées (abscisse, éloignement, cote) des sommets sont, en centimètres :

$$A(-2, 4, 5), \quad B(-4, 0, 2), \quad C(0, 0, 3).$$

Les rayons lumineux sont horizontaux, dirigés de gauche à droite, d'avant en arrière et inclinés à 45° sur le plan de front. Chercher l'ombre sur le plan de front.

107. — Ombre au soleil d'un parallélogramme ABCD. La ligne de terre est la petite auge du cadran (180° sur 240°); l'origine des abscisses est au centre de la feuille. Unité : cm.

$$A \quad O_x = 10 \quad c = 30 \quad e = 50$$

$$B \quad O_y = 50 \quad c = 0 \quad e = 5$$

$$C \quad O_y = 60 \quad c = 70 \quad e = 40$$

$$\text{Point lumineux } S \quad O_x = 80 \quad c = 110 \quad e = 110.$$

108. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées des sommets (abscisse, éloignement, cote) sont, en centimètres :

$$A(-4, 0, 4), \quad B(-0, 4, 7), \quad C(0, 4, 7).$$

Les rayons lumineux, de gauche à droite, sont dirigés de haut en bas, d'avant en arrière et leurs projections font chacune un angle de 45° avec  $xy$ . Chercher l'ombre sur le plan de front.

109. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées des sommets (abscisse, éloignement, cote) sont, en centimètres :

$$A(-2, 6, 10), \quad B(-6, 6, 0), \quad C(0, 6, 0).$$

Les rayons lumineux sont dirigés comme à l'exercice précédent. Chercher l'ombre portée sur le 1<sup>er</sup> dièdre de projection.

Droites et plans perpendiculaires.

Exemples de perpendiculaires menées d'un point à un plan :

110. — Le plan est défini par deux droites telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune et la projection frontale de l'autre sont portées par la même droite.

111. — Le plan est parallèle à  $xy$ .

112. — Le plan est défini par  $xy$  et un point.

113. — Les traces du plan sont, sur l'épure, portées par la même droite.

114. — Projeter sur un plan  $PxQ'$  donné par ses traces un triangle ABC ayant un sommet sur  $xy$ , un dans le plan horizontal, un dans le plan frontal de projection.

115. — Mener par un point le plan de haut (ou le plan vertical) perpendiculaire à un plan donné.

116. — On donne une droite et un plan; par leur point d'intersection, mener dans le plan la perpendiculaire à la droite.

117. — Construire le symétrique d'un point A par rapport à un plan donné, ou par rapport à une droite donnée.

118. — Projeter sur un plan donné par ses traces une frontale donnée parallèle au plan.

119. — Mener d'un point la perpendiculaire à une droite de profil.

120. — Déterminer le lieu géométrique des points équidistants de deux points fixes A et B.

APPLICATIONS. — 1° Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux points donnés A, B.

2° Construire le lieu des points d'un plan P, équidistant de deux points fixes A, B.

121. — Construire le lieu des points équidistants de 3 points fixes A, B, C.

APPLICATION. — Trouver sur un plan donné un point équidistant de 3 points donnés A, B, C.

122. — Déterminer le lieu des points équidistants de deux droites concourantes fixes D,  $\Delta$ .

APPLICATIONS. — 1° Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux droites concourantes données.

2° Construire le lieu des points d'un plan P équidistants de deux droites concourantes fixes D,  $\Delta$ .

123. — On donne la projection horizontale d'un angle droit et la projection frontale d'un de ses côtés. Acheter l'épure.

APPLICATION. — On donne la projection horizontale d'un losange et un plan contenant l'une des diagonales. Trouver la projection frontale.

124. — Soit deux droites B et  $\Delta$  et leur perpendiculaire commune AB. On donne la projection horizontale de l'ensemble et la projection frontale de B. Acheter l'épure.

125. — Par un point donné mener une droite parallèle à un plan donné et orthogonale à une droite donnée.

126. — Mener par un point donné et un plan perpendiculaire à un plan donné et parallèle à une droite donnée. Faire l'épure en supposant sur  $xy$  la droite dans le second bissecteur, et le plan donné par ses traces. Construire les traces du plan demandé.

127. — Mener par une droite donnée le plan perpendiculaire au 1<sup>er</sup> bissecteur.

128. — Caractériser les plans sur lesquels deux droites données AB et CD ont des projections parallèles. Déterminer (sur une épure) celui de ces plans qui passe par une droite donnée  $\Delta$ .

APPLICATION. — Déterminer un plan sur lequel les projections de 4 points donnés A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme.

## Méthodes et problèmes généraux.

## Changements de plan.

Au moyen d'un *changement de plan frontal* :

120. — Aligner les nouvelles projections frontales de 3 points données.  
121. — Amener en coïncidence, sur l'épure, les nouvelles traces d'un plan donné.  
122. — Rendre parallèles les nouvelles projections frontales de deux droites données.

Au moyen d'un *changement de plan horizontal* :

123. — Rendre de profil une droite donnée.  
124. — Rendre une droite donnée parallèle au 2<sup>e</sup> nouveau bissecteur.

Au moyen de deux *changements de plan* résoudre les problèmes suivants :

125. — Rendre de haut une droite donnée.  
126. — Rendre parallèle à  $xy$  une droite donnée.  
127. — Rendre de front un plan donné.  
128. — Rendre horizontales deux droites données.  
129. — Rendre de bout deux plans donnés.

## Rotations.

Au moyen d'une *rotation* autour d'un axe vertical donné, résoudre les problèmes suivants :

130. — Amener un point donné à une distance donnée d'une horizontale fixe donnée.

131. — Amener une droite donnée à représenter une verticale fixe donnée, ou une droite de bout fixe donnée.

132. — Amener un plan donné à passer par un point fixe donné, ou amener un point donné dans un plan fixe donné.

133. — Amener les extrémités d'un segment horizontal donné à la même distance d'un point fixe donné.

134. — 1<sup>o</sup> Amener un plan donné à être parallèle à une droite fixe donnée.

- 2<sup>o</sup> Amener une droite à être parallèle à un plan fixe donné par ses droites principales.

135. — Déterminer une rotation d'axe vertical qui amène en coïncidence deux droites de même pente (l'une, bien entendu, restant fixe) (C. cotée).

136. — Au moyen d'une rotation amener les nouvelles traces principales de deux plans à être parallèles.

Au moyen de deux *rotations*, résoudre les problèmes suivants :

137. — Rendre parallèle à  $xy$  une droite donnée.  
138. — Rendre de front un plan donné.  
139. — Rendre de profil un plan donné.

## Rabattements.

140. — On rabat un plan sur le plan horizontal de projection on donne, soit la projection cotée d'un point du plan et son rabattement, soit les

projections mes' d'un point du plan et son rabattement. Déterminer la charnière.

151. — On donne la trace horizontale  $\alpha P$  d'un plan et rabattement  $\alpha Q$  de la trace frontale sur le plan horizontal de projection. Délever cette trace.

152. — Dans le rabattement d'un plan sur un plan horizontal, on donne la charnière, le rabattement d'un point  $M$  et une des projections de ce point. Trouver l'autre.

153. — Sur une horizontale donnée d'un plan, trouver le point équidistant de deux points donnés  $A$  et  $B$  de ce plan.

154. — Unité : cm. Représenter un hexagone régulier tracé dans un plan de pente 0,5 connaissant le côté  $ab$ , dont la longueur est 5" (C. cotée).

155. — Soit un triangle  $ABC$  ayant un côté horizontal  $AB$ . Construire un point du plan de ce triangle connaissant ses distances aux côtés  $AB$  et  $AC$ . — On donne les sommets soit par leurs projections (horizontale et frontale), soit par leurs projections cotées.

156. — Soit un triangle équilatéral  $ABC$  dont le plan est donné par son inclinaison de pente; on donne les projections de deux sommets; achever la représentation du triangle (C. cotée).

157. — Même question pour un cercle dont on donne deux sommets,  $\alpha$  et  $\alpha'$  coïncidents, soit opposés.

158. — Dans un plan défini par une horizontale et un point  $O$ , construire un triangle équilatéral (ou un carré, ou un pentagone régulier) ayant  $O$  pour centre, enroulant la projection horizontale d'un sommet.

159. — On donne un plan par ses traces  $P$  et  $Q'$  et un point  $A$  sur la trace frontale. Joindre le point  $A$  au point  $B$  de la trace horizontale de façon que le triangle  $\alpha AB$  ait une aire donnée.

160. — Construire un triangle équilatéral dont un sommet  $A$  est donné sur  $xy$ , le côté  $BC$  étant porté par une horizontale donnée.

## Projection du cercle.

161. — Dans un plan défini par ses lignes principales  $OH$ ,  $OF$ , on donne un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Trouver les points d'intersection de ce cercle et d'un plan défini par  $xy$  et un point  $A$ .

Représenter les cercles circonscrit et inscrit à un triangle  $ABC$  :

162. — Le triangle  $abc$  est équilatéral, de côté 5", et on coté :  $a_1b_1c_1$  (unité : cm.).

163. — On place  $A$  dans le plan horizontal,  $B$  dans le plan frontal de projection;  $C$  est quelconque.

164. — Un cercle situé dans un plan de bout est défini par son diamètre de front. Construire les points de ce cercle qui sont dans un plan donné; qui sont à une distance donnée d'un plan donné.

165. — Par deux droites parallèles  $D$  et  $\Delta$ , faire passer respectivement deux plans perpendiculaires qui coupent  $xy$  en un même point (non donné). — On pourra rendre  $D$  et  $\Delta$  de bout au moyen d'un changement de plan.

166. — Par deux points donnés  $A$ ,  $B$  faire passer un cercle tangent à une frontale donnée. (Ici donné et les deux points sont, bien entendu, dans un même plan).

167. — Par un point  $A$  donné dans le plan d'un cercle  $O$ , on mène 1<sup>o</sup> une tangente; 2<sup>o</sup> une sécante sur laquelle il découpe une corde de

longueur donnée. — On détermine le plan du cercle par le point A et l'horizontale passant par le centre; on déterminera le cercle par son centre et son rayon.

#### Distances.

168. — Mener un segment de longueur donnée, dont une extrémité est donnée et dont l'autre doit être sur une horizontale donnée.

169. — On donne la distance de deux points, les projections de l'un d'eux, une projection de l'autre; construire l'autre projection.

170. — La trace horizontale A d'une droite a pour éloignement  $\pm 30^{\text{mm}}$ , sa trace frontale B a pour cote  $\pm 30^{\text{mm}}$ ; le segment AB mesure  $30^{\text{mm}}$ . Construire l'épure de la droite.

#### Exemples de distances d'un point à un plan :

171. — En plan a, sur l'épure, ses traces principales.

172. — Le plan est défini par  $\alpha\gamma$  et un point.

173. — Chaque projection du point est sur la trace de même nom du plan.

174. — Mener par une horizontale donnée un plan qui soit à une distance connue d'un point donné.

#### Distance de deux plans parallèles :

175. — Données par leurs échelles de pente.

176. — Données par leurs droites principales.

Problèmes inverses. — Mener à un plan donné P un plan parallèle à une distance donnée :

177. — Le plan P est défini par son échelle de pente.

178. — Le plan P est défini par ses droites principales.

A remarques. — Trouver sur une droite donnée un point dont on connaît la distance à un plan donné (base et cote).

179. — Par deux points donnés A et B et une droite donnée CD, faire passer trois plans parallèles, le plan issu de CD étant à égale distance des deux autres.

180. — On connaît la distance d'un plan P à un point A.

1<sup>o</sup> Le point A étant donné sur  $\alpha\gamma$ , déterminer le plan connaissant sa trace horizontale.

2<sup>o</sup> Le plan étant donné, déterminer la cote du point (ou sa projection frontale) connaissant sa projection horizontale.

181. — On connaît la distance de deux plans parallèles et leurs traces frontales. Acheter de les déterminer sur l'épure.

#### Exemples de distance d'un point à une droite :

182. — La droite est contenue dans le plan frontal de projection.

183. — La droite est parallèle à  $\alpha\gamma$ .

184. — La droite est de profil.

185. — Par deux points A et B d'un plan, tracer dans ce plan deux droites parallèles connaissant leur distance.

186. — Construire un point d'un plan défini par ses traces connaissant : 1<sup>o</sup> soit ses distances aux traces du plan;

2<sup>o</sup> soit ses distances à deux points du plan données par leurs projections horizontales.

187. — Construire un vecteur CD équipollent à un vecteur donné AB, les points C et D étant respectivement sur un plan P et sur une droite a donnée.

188. — On donne un plan par son échelle de pente, et la projection d'un point A; trouver sa représentation en distance au plan.

#### Perpendiculaire commune à deux droites :

189. — Les deux droites ont leurs projections horizontales parallèles.

190. — L'une des droites est  $\alpha\gamma$ , l'autre est de profil.

191. — L'une des droites est  $\alpha\gamma$ , l'autre est quelconque.

192. — L'une des droites est horizontale ou du front, l'autre est quelconque.

193. — Les deux droites sont parallèles ou 2<sup>o</sup> bissecteur.

194. — Mener par un point donné une droite de pente donnée, et passant à une distance connue d'une verticale donnée.

195. — Mener par un point donné une droite glissant sur une droite donnée, et passant à une distance connue d'une verticale donnée.

196. — On connaît les distances d'une verticale à une autre verticale donnée V et à une droite donnée D. Construire cette verticale.

197. — On connaît la distance de deux droites. Sur l'épure est représentée l'une des droites et le pied, sur elle, de la perpendiculaire commune; on donne en outre une des projections de la deuxième droite. Trouver l'autre.

198. — Mener une droite de direction donnée s'appuyant sur une droite donnée et sur laquelle les plans de projection découpent un segment de longueur donnée.

199. — Construire un triangle rectangle isocèle connaissant l'hypoténuse  $bc_1$  et la cote b du sommet A.

#### Angles.

##### Angle de deux droites :

200. — L'une est verticale.

201. — L'une est de profil.

202. — Chaque projection de l'une coïncide avec la projection de même nom de l'autre.

203. — On connaît l'angle  $Pa'P'$  (de l'espace) des traces d'un plan.  $\alpha\gamma'$  étant tracée sur l'épure, construire  $\beta P$ .

204. — Un triangle équilatéral ABC est donné dans le plan horizontal de projection. Ce triangle est la projection orthogonale d'un triangle isocèle ABC, dont le sommet A se projette en a et dont l'angle au sommet est égal à un demi-droite.

Indiquer les constructions qui permettent de déterminer la cote du point a et l'angle du plan du triangle ABC avec le plan horizontal.

(Bour, Ritzschburg.)

205. — On donne la projection horizontale  $bc$  d'un angle BAC de grandeur connue (les points B et C ont pour cote zéro). Graduer les côtés de l'angle (C. cote) ou trouver sa projection frontale (C. descriptive).

206. — On donne dans le plan de projection, un triangle abc, le côté  $bc = 1$  unité, l'angle bas est de 120 degrés, et les deux côtés ab et ac sont égaux.

de triangle est la projection d'un triangle  $BAC$  ayant deux sommets  $b$  et  $c$  dans le plan de projection; l'angle  $A\hat{b}c$  est droit.

Calculer la cote de  $A$ , et la pente du plan  $ABC$ . (Hecq, Peitlers.)

207. — On donne la projection horizontale d'un angle  $BAC$  de grandeur connue dont un côté  $bca$  est horizontal; tracer la projection.

208. — On connaît l'angle  $\alpha$  que fait une droite  $d$  d'un plan avec une horizontale  $D$  de ce plan. Connaissant les projections horizontales  $b$  et  $c$  de ces droites, achever de déterminer le plan,

soit par son échelle de pente (G. caté),

soit par une frontale (G. descriptif).

Mener par un point  $A$  une droite coupant une droite donnée  $ll$  sous un angle donné  $\alpha$ .

209. — La droite donnée est horizontale, ou de front, ou parallèle à  $xy$ .

210. — La droite donnée est de haut;

211. — La droite donnée est de profil.

212. — Mener une droite parallèle à un plan donné lui orthogonale à une droite donnée et coupant deux droites données sous le même angle.

213. — On donne dans le plan  $ll$  trois points  $a$ ,  $b$ ,  $c$  formant un triangle équilateral de  $1''$  de côté; ce sont les projections de 3 points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de l'espace formant un triangle isocèle rectangle en  $A$ . La cote de  $A$  est  $1''$ .

1° Montrer que  $AB$ ,  $AC$  ont la même pente et que le milieu de  $BC$  a aussi pour cote  $1$ .

2° Trouver les cotes de  $B$  et  $C$  et la pente du plan du triangle.

(Hecq, Peitlers.)

214. — Un cône de révolution a pour sommet un point  $S$ , pour axe une frontale  $SD$  du plan horizontal de comparaison, pour demi-angle au sommet un angle  $\alpha$ . Déterminer la génératrice sur laquelle les plans de comparaison découpent un segment  $SA$  de longueur donnée.

Angle d'une droite et d'un plan :

215. — Le plan est vertical, la droite est quelconque.

216. — Le plan est donné par ses droites principales, la droite est horizontale.

217. — La droite a ses projections symétriques par rapport à  $xy$ , le plan est le 2° bissecteur.

218. — La droite a ses projections confondues, le plan est le 1° bissecteur.

219. — La droite est  $xy$ , le plan est donné par ses droites principales.

220. — Le plan est donné par son échelle de pente, la droite est verticale (G. caté).

221. — Une projection de la droite est perpendiculaire à la trace du même plan du plan.

222. — Le plan  $\alpha$ , sur l'épure, ses traces confondues; la droite est horizontale.

223. — On donne la projection horizontale d'une droite et la projection frontale d'un de ses points. Achever de représenter la droite connaissant l'angle qu'elle fait soit avec le plan frontal, soit avec le plan horizontal de projection.

224. — Dans un plan donné par ses traces  $P \wedge Q'$ , mener par  $\alpha$  une droite faisant un angle donné  $\alpha$  avec  $xy$ .

Mener par une droite donnée  $D$  d'un plan  $P$  une droite faisant avec ce plan un angle donné  $\alpha$ .

225. — La droite  $D$  est une horizontale du plan  $P$ .

226. — Le plan  $P$  est vertical, la droite est quelconque.

227. — Les données sont quelconques, le plan étant défini par son échelle de pente.

228. — Un angle  $AMH$  se projette sur le plan horizontal suivant un angle droit et ses côtés font avec ce plan un même angle  $\alpha$ . Construire sa vraie grandeur et l'angle de son plan avec le plan horizontal.

(Hecq, Clermont.)

229. — Mener par une droite  $D$  un plan faisant le plus grand angle possible avec une droite  $\Delta$ .

Angle de deux plans  $P$  et  $ll$  :

230. — L'un est vertical, l'autre est quelconque.

231. — L'un est de profil, l'autre est quelconque.

232. — L'un est le plan vertical, l'autre le plan de haut issu d'une droite donnée  $D$ .

233. — On donne l'intersection qui est de profil et les traces horizontales.

234. — On donne l'intersection, un point de l'un, une trace de l'autre.

235. — Les deux plans ont leurs horizontales parallèles.

236. — Les deux plans ont leurs traces frontales parallèles.

237. — Pour chaque plan, les traces sont portées, sur l'épure, par la même droite.

238. — Connaissant les angles aigus  $\alpha = P \wedge xy$ ,  $\alpha' = Q' \wedge xy$  des traces d'un plan  $P \wedge Q'$  avec  $xy$ , déterminer les éléments du trièdre  $\alpha, P, Q'$ . Montrer en particulier que :

$$\cos P \wedge Q' = \cos \alpha, \cos \alpha'.$$

239. — Construire un plan connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait, soit avec le plan horizontal, soit avec le plan frontal de projection.

240. — Deux plans ont leurs échelles de pentes parallèles; calculer leur angle. [Utiliser la formule qui donne  $\tan(\alpha + \beta)$ .]

241. — Mener par une droite donnée un plan faisant des angles égaux avec deux plans donnés.

242. — Mener par une droite donnée un plan dont on connaît l'angle  $\theta$  avec le plan horizontal.

243. — Construire les bissecteurs des dièdres formés par un plan et les plans de projection; chercher ensuite leur intersection. Que constate-t-on? (On particulier au cas le plan est parallèle à  $xy$ .)

244. — Construire une droite faisant des angles donnés avec le plan horizontal et avec la ligne de terre.

245. — Construire, dans un plan donné, une droite faisant un angle donné avec le plan frontal de projection (On se donnera le plan par une frontale et un point).

246. — Construire l'angle du premier bissecteur et d'un plan vertical dont la trace fait  $45^\circ$  avec  $xy$ . — Evaluer cet angle.

247. — Un trièdre a une face de  $10^\circ$  et deux faces de  $13^\circ$ . Construire et évaluer le rectangle du dièdre opposé à la plus grande face.

Construire un triangle isocèle  $AHC$  ( $AH = AC$ ).

246. — On donne les sommets  $B$  et  $C$ , la hauteur (en grandeur) issue de  $A$  et un plan contenant le sommet  $A$ .

249. — On donne les sommets  $B$  et  $C$ , la longueur  $AB = AC = l$ , et un plan issu de  $B$  contenant le sommet  $A$ .

250. — Construire un tétraèdre connaissant deux faces, dont l'une est donnée dans le plan horizontal, et le dièdre compris. — Déterminer les éléments inconnus.

251. — Construire un tétraèdre connaissant une face, donnée dans le plan horizontal, et les dièdres adjacents. — Déterminer les éléments inconnus.

252. — Construire un tétraèdre connaissant deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux (Prendre comme plan horizontal le plan de la face, non donnée, adjacente aux dièdres donnés).

### Polyèdres. Sphère.

Représenter un tétraèdre régulier :

253. — On donne le plan de base (défini par une échelle de pentes) et deux sommets situés dans ce plan.

254. — On donne une arête verticale  $SA$  ( $C$  coté).

255. — On donne un sommet  $A$  sur  $xy$ , et on sait que l'arête  $BC$  est sur une horizontale donnée.

256. — On donne une arête  $AB$  (en grandeur et position) et la projection horizontale de la droite  $AC$  (Le sommet  $S$  est au dessus de plan  $AHC$ ).

On donne la base  $AHC$ , située dans le plan horizontal d'un tétraèdre  $SABC$ . Représenter ce tétraèdre :

257. — Sachant que le triangle de sommet  $S$  est trirectangle ;

258. — Connaissant les longueurs des 3 arêtes issues de  $S$ .

259. — Connaissant les dièdres d'arêtes  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  ;

260. — Connaissant la projection  $s$  du sommet et sachant que le dièdre  $SA$  est droit.

261. — Représenter un tétraèdre  $SABC$  dont le triangle  $S$  est trirectangle ; on sait de plus que la face  $ABC$  est horizontale, et on donne, en projection horizontale, le segment  $ax$  et les droites portant  $ab$  et  $ac$ .

Même question lorsqu'on se donne la projection cotée du sommet et les projections horizontales, non graduées des droites portant les arêtes.

262. — On considère un plan de bout  $P \perp Q'$ . Un triangle  $ABC$  est dans ce plan et se projette horizontalement suivant un triangle équilatéral de côté 1. L'un des côtés  $AB$  du triangle  $ABC$  est de bout. Le triangle  $ABC$  est la base d'un tétraèdre  $SABC$ , dont la face  $SAB$  est un triangle équilatéral situé dans le plan de profil de  $AB$ .

Tracer les projections du tétraèdre  $SABC$ . (face, Marseille.)

263. — Représenter une pyramide hexagonale régulière connaissant le côté de base  $AB = 2''$ , et la hauteur,  $12''$ . La pyramide repose par un triangle isocèle  $SAB$  sur le plan horizontal, l'arête  $SA$  étant parallèle à  $xy$ ,  $A$  est plus près que  $B$  de  $xy$ .)

264. — Représenter une pyramide quadrangulaire régulière : on connaît le centre et un sommet de la base, qui est de bout, et la longueur des arêtes latérales.

265. — On donne une pyramide ayant pour base un carré  $AHGD$  de côté  $l$  dans le plan de comparaison et pour sommet un point  $S$  du cône fixe se projetant à l'intérieur du carré  $A$  une distance  $a$  des deux côtés issus de  $A$ . Déterminer la vraie grandeur des faces latérales et les angles qu'elles font avec le plan horizontal.

Représenter un cube :

266. — Une des faces est dans le plan horizontal, une arête est de front.

267. — Un plan diagonal est de front ; une arête est horizontale.

268. — Un plan diagonal est de front, un diagonal est verticale.

269. — On donne deux sommets  $A$ ,  $C$ , non consécutifs d'une face et un plan  $P$  contenant la diagonale issue du sommet  $A$ . ( $P$  est défini, par exemple, par le point  $A$  et une horizontale  $B$ ).

270. — Un cube a une diagonale verticale. On enlève du cube la partie située au-dessous du plan perpendiculaire au milieu de cette diagonale. Représenter le solide restant.

Représenter un parallélépipède :

271. — On donne, par leurs projections, les 3 arêtes (segments) issues d'un sommet.

272. — On donne, par leurs projections, les droites portant 3 arêtes non situées (deux à deux) dans un même plan.

273. — Le parallélépipède est droit. On donne les projections d'une base et la hauteur.

274. — Dans un plan défini par les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , on considère la droite de diagonale  $AC$ . Représenter l'octaèdre régulier formé par deux pyramides rectes ayant ce carré.

275. — Tax de sable. On donne dans le plan de comparaison un rectangle ayant pour côtés  $5''$  et  $8''$ , de chaque côté perpend les plans faisant avec ce rectangle des angles de  $60^\circ$  ; la hauteur du tas est  $2''$ . Représenter le solide obtenu ; coupes par des plans horizontaux équidistants de  $40''$ , (échelle 1/100.)

276. — Une pyramide régulière à base carrée repose (par la base) sur le plan horizontal. Par le milieu de la hauteur on mène le plan parallèle au 2<sup>e</sup> bissecteur et on enlève la partie de la pyramide située au-dessus du plan de section. Représenter le solide restant.

277. — On donne un tétraèdre par ses 3 sommets. Chercher les points d'intersection avec la parallèle à  $xy$  issue du point commun aux droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.

278. — Tas de sable.

Côté de  $18''$  sur  $24$ .  $O$  est au centre de la feuille. On partit par le point  $ase$  vers la droite,  $Oy$  par le grand axe vers le bas. Côté : m. Echelle 0/2.

Sur un sol supposé plan, de pente  $\frac{1}{3}$ , dont l'horizontale de cote  $R, M$  se projette sur  $Oy$ , repose un tas de sable. La face supérieure est un rectangle horizontal  $AHGD$ , de cote  $10$ .  $A$  se projette en  $a$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) et  $B$  en  $b$  ( $x = -0,5$ ,  $y = 1,5$ ) ; les côtés  $AD$  et  $BC$  valent  $2,50$  et sont dirigés vers le droit. Les faces latérales ont pour pente  $1,25$ . Représenter le tas de sable, et figurer la section par le plan vertical mené par le centre du rectangle  $AHGD$  perpendiculairement au sol.

379. — Une pyramide  $SABC$  a pour base un triangle  $ABC$  situé dans la partie avant du plan horizontal.  $AB$  est parallèle à  $xy$  et  $C$  est en avant de  $AB$ . On donne (unité : mm.)

$$AB = AC = 116, \quad BC = 147, \quad SA = SB = SC = 104.$$

1° Représenter la pyramide.

2° Représenter la section faite par un plan perpendiculaire à  $SA$ , mené par le point de cette arête situé au quart de sa longueur à partir du sommet  $S$ . (Sujet-Cyr, partiel.)

380. — Représenter un cube  $ABCEFGH$ . Le sommet  $A$  est défini par (unité : cm.) : abscisse = 1, éloignement = -0,5; cote = 23; le sommet  $B$  par abs. = -6, él. = 4,5, cote = 19. Le sommet  $C$  est dans le plan de cote 12 : on prendra des deux sommets possibles celui qui a la plus grande éloignement. L'arête  $CG$ , perpendiculaire à la face  $ABED$ , est tout entière au-dessus du plan de cote 12. (Sujet-Cyr, partiel.)

Ombres.

381. — Ombre portée par un polyèdre sur un plan. — Ombre propre. — On cherche l'ombre des diverses arêtes; certains des segments obtenus forment un polygone à l'intérieur duquel sont tous les autres; ce polygone constitue le contour de l'ombre portée. Les arêtes dont il est l'ombre forment dans l'espace le contour d'ombre propre du polyèdre; ce contour sépare la surface du polyèdre en deux régions, l'une éclairée, l'autre dans l'ombre. On les distingue en considérant un rayon lumineux qui « traverse » le polyèdre : le point d'entrée est éclairé, les autres points d'intersection qu'il se réduisent à un, dans le cas d'un polyèdre convexe) sont dans l'ombre.

382. — Ombre au sol d'un tronc de prisme triangulaire. (Les plans de proj. sont obliques). Cote de 130 sur 240. — Unité mm. — La ligne de terre est le petit axe. Les abscisses sont rapportées au milieu  $O$  du ligne de terre. Le tronc repose par une section droite  $ABC$ , sur le plan horizontal :

A abscisse : — 50	éloig. : 100	arête $AD$ — 80
B — 70	50	arête $DE$ — 34
C — 1	20	arête $CF$ — 86.

Rayons lumineux : leurs projections font l'une et l'autre 67° avec la ligne de terre; de gauche à droite ils sont dirigés du haut en bas et d'avant en arrière.

383. — Ombre au flambou d'un cube (G. Corclé).

Cote de 18° sur 24.  $O$  est au centre de la feuille.  $Ox$  dirigé suivant le grand axe vers la droite,  $Oy$  suivant le petit axe vers le bas;  $z$  est la cote. — Unité cm.

Un cube  $ABCEFGH$  d'arête 3,4 repose sur un plan faisant 30° avec le plan horizontal dont l'arête de jonction est parallèle à  $Oz$ ; les arêtes croissent de gauche à droite. Un des sommets de la base  $AHCB$  a pour coordonnées

$$A(x = -5,4 \quad y = 4,8 \quad z = 7).$$

Le sommet  $C$  oppose à  $A$  a pour cote 9 et sa projection est plus près de  $Ox$  que celle de  $A$ . Le point lumineux est sur le prolongement de l'arête  $AN$  et sa cote est  $z = 23$ .

Représenter le cube et l'ombre qu'il porte sur le plan de projection.

Si on a besoin d'une projection auxiliaire, on prendra la ligne de terre parallèle au grand axe, à 27° au-dessus.

384. — Ombre au flambou d'un prisme hexagonal régulier (G. Corclé). Le plan de base a pour cote 1,23, le centre  $O$  de la base inférieure a pour cote 47 et un des arêtes, horizontal, a pour cote 27; les arêtes latérales mesurent 37. Chercher l'ombre au flambou (ombre propre et ombre portée sur le plan horizontal), le point lumineux ayant pour cote 29 et se projetant au centre de la base inférieure. (Cote de 18° sur 24. On placera  $O$ , à 37 du bord de gauche, sur le grand axe; les horizontales du plan de base sont parallèles au petit axe, les arêtes croissent de gauche à droite.)

Sphère.

385. — Déterminer la sphère (centre et rayon) circonscrite à un tétraèdre  $ABCD$  ayant une face  $BCD$  dans le plan horizontal.

386. — Construire les contours apparents d'une sphère de rayon donné passant par un cercle situé dans un plan de bout et défini par son diamètre de front.

387. — Par une droite donnée, mener un plan coupant un dièdre donné suivant un angle droit. — Faire l'épure dans le cas où une face du dièdre donné est dans un des plans de projection.

388. — Déterminer la sphère inscrite à un tétraèdre ayant une face  $BCD$  dans le plan horizontal.

Le centre est commun aux bissecteurs des dièdres  $BCD$ ,  $CDB$ ,  $DBC$ .

Une autre construction est fondée sur la remarque suivante : si on rabat sur le plan horizontal les faces issues de  $A$  de façon qu'elles recouvrent la base  $BCD$ , le centre du cercle passant par les rabattements  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  du sommet  $A$ , se confond avec la projection du centre de la sphère inscrite.

389. — Étant donné deux points  $A$ ,  $B$  et une droite  $D$ , trouver sur  $D$  un point d'où un visé le segment  $AB$  sous un angle droit.

390. — Intersection du second bissecteur et d'une sphère dont les contours apparents sont connus.

391. — Déterminer le grand cercle d'une sphère dont le plan passe par une horizontale, ou une droite de front donnée.

392. — Étant donné un miroir sphérique défini par son centre  $O$  et un point  $L$  construis le rayon réfléchi d'un rayon incident donné  $AL$ .

393. — Construire une sphère connaissant deux tangentes et leurs points de contact. Faire l'épure en se donnant une tangente de bout et une tangente verticale.

394. — À une sphère donnée tracer une tangente donnée dans la projection horizontale et la pente (G. Corclé.)

395. — Construire le vecteur  $GB$  équivalent à un vecteur donné  $AB$ , les points  $G$  et  $B$  devant être respectivement sur une sphère et sur une droite donnée.

396. — Mener par un point donné une droite s'appuyant sur une droite donnée et passant à une distance donnée d'un point donné.

397. — Au moyen d'une relation autour d'un axe donné dans un plan de bout, mener un segment  $AB$  de ce plan à être vu sous un angle droit d'un point fixe  $M$  donné dans le plan horizontal.

398. — Par deux points  $A$  et  $B$  pris sur une sphère donnée, faire passer



un plan qui le coupe suivant un cercle circonscrit à un carré de côté AB.

299. — Par un cercle donné dans le plan (horizontal), faire passer une sphère tangente au plan horizontal.

300. — Même question pour un cercle donné dans un plan quelconque défini, par exemple, par sa trace horizontale et la centre du cercle.

301. — Une sphère de 5<sup>m</sup> de rayon est tangente aux deux plans de projection. Chercher ses points d'intersection avec une droite dont les projections rencontrent  $xy$  au même point, font avec  $xy$  un angle de 50° et sont chacune à 2<sup>m</sup> de la projection de même nom du centre de la sphère. Trouver ensuite les traces du plan tangent en l'un des points d'intersection. (Bacc. Marseille.)

302. — Mener par une droite, un plan qui coupe une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

303. — Construire une sphère passant par un point donné et tangente à deux verticales données.

304. — *Ombre d'une sphère.* — On l'obtient en considérant soit le cône circonscrit ayant pour sommet la source lumineuse (ombre au flambeau), soit le cylindre circonscrit parallèlement aux rayons lumineux (ombre au soleil). Le contour d'ombre propre est le cercle de contact du cône ou du cylindre circonscrit.

Construire l'ombre au flambeau d'une sphère et l'ombre portée sur le plan horizontal. On supposera le point lumineux  $S$  situé dans le plan tangent au point le plus haut  $A$  de la sphère. Prendre une sphère de centre  $o$ , de rayon 2 (unité : cm) et  $AB = 5$ ; placer  $a$  et  $o$  sur le grand axe de la feuille,  $a$  à 1 du bord de gauche.

## TABLE DES MATIÈRES

Notions préliminaires . . . . .	5
---------------------------------	---

## ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES EN GÉOMÉTRIE COTÉE

### LIVRE I. — LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE I. — Le point et la droite. . . . .	6
§ 1. <i>Épure du point. Généralités.</i> . . . .	6
Échelle numérique. Échelle graphique . . . . .	6
Rabattement d'un plan vertical. . . . .	8
§ 2. <i>La droite. Pente et intervalle.</i> . . . .	9
Problème. — Coter un point d'une droite donnée connaissant sa projection. . . . .	10
Angle d'une droite avec le plan horizontal. — Distance de deux points . . . . .	11
Problème inverse. — Marquer un point sur une droite donnée connaissant sa cote . . . . .	11
Graduation d'une droite . . . . .	12
§ 3. <i>Droites parallèles. Droites concourantes.</i> . . . .	13
CHAPITRE II. — Le plan. . . . .	16
Plans remarquables . . . . .	16
Représentation d'un plan quelconque . . . . .	18
Droites remarquables d'un plan : horizontales, lignes de pente . . . . .	17
Problèmes :	
Déterminer une droite d'un plan donné connaissant sa projection. . . . .	19
Coter un point d'un plan connaissant sa projection. . . . .	19
Par un point donné d'un plan, mener dans ce plan une droite de pente donnée . . . . .	20
Par une droite donnée, faire passer un plan de pente donnée . . . . .	21

## LIVRE II. — FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

CHAPITRE I. — Droites et plans parallèles . . . . .	22
§ 1. Parallélisme d'une droite et d'un plan . . . . .	22
§ 2. Plans parallèles . . . . .	23
CHAPITRE II. — Intersection de droites et de plans . . . . .	25
§ 1. Intersection de deux plans . . . . .	25
§ 2. Intersection d'une droite et d'un plan . . . . .	27
Intersection de trois plans . . . . .	28
Problèmes de constructions de droites . . . . .	28
CHAPITRE III. — Droites et plans perpendiculaires . . . . .	30
Problèmes :	
Mener par un point la perpendiculaire à un plan . . . . .	30
Mener par un point le plan perpendiculaire à une droite . . . . .	31
Mener par un point la perpendiculaire à une droite . . . . .	31
Perpendiculaire commune à deux droites . . . . .	31

ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES  
PAR LA MÉTHODE DES DEUX PROJECTIONS

## LIVRE I. — LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE I. — Le point . . . . .	33
§ 1. Plans de projections. Épure du point . . . . .	33
§ 2. Définitions . . . . .	34
§ 3. Épure du point dans ses différentes positions . . . . .	37
§ 4. Changement de plan frontal . . . . .	40
CHAPITRE II. — La droite . . . . .	42
§ 1. Détermination d'une droite par ses traces . . . . .	42
Changement de plan frontal pour une droite . . . . .	45
Problème : On donne l'une des projections d'un point d'une droite; trouver l'autre projection . . . . .	45
Construction des traces d'une droite . . . . .	46
§ 2. Droites remarquables . . . . .	49
Horizontale et frontale . . . . .	49
Verticale et droite de bout . . . . .	50
Droites parallèles à <i>oxy</i> ; de profil; parallèles à un li. vecteur . . . . .	50
§ 3. Droites concourantes . . . . .	50
§ 4. Droites parallèles . . . . .	54
CHAPITRE III. — Le plan . . . . .	56
Représentation d'un plan. — Emploi des traces . . . . .	56

§ 1. Plans remarquables . . . . .	57
Plan vertical ou de bout . . . . .	57
Plan de profil . . . . .	58
Plan horizontal ou de front . . . . .	58
§ 2. Plan quelconque . . . . .	60
§ 3. Horizontales, frontales et traces d'un plan. Construction des traces . . . . .	59
Problèmes : — On donne l'une des projections d'une droite d'un plan; trouver l'autre projection . . . . .	61
On donne l'une des projections d'un point d'un plan; trouver l'autre projection . . . . .	63
Changement de plan frontal pour un plan . . . . .	63
Rabattement d'un plan vertical sur le plan horizontal de projection. d'un plan de bout sur le plan frontal de projection . . . . .	65
Lignes de pente d'un plan . . . . .	67
Suppression de la ligne de terre . . . . .	68

## LIVRE II. — FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

CHAPITRE I. — Droites et plans parallèles . . . . .	71
§ 1. Parallélisme d'une droite et d'un plan . . . . .	71
§ 2. Plans parallèles . . . . .	72
CHAPITRE II. — Intersection de droites et de plans . . . . .	74
§ 1. Intersection de deux plans . . . . .	74
§ 2. Intersection d'une droite et d'un plan . . . . .	77
Intersection de trois plans . . . . .	78
Problèmes de constructions de droites . . . . .	78
CHAPITRE III. — Droites et plans perpendiculaires . . . . .	79
Condition d'orthogonalité d'une droite et d'un plan . . . . .	80
Problèmes :	
Mener par un point la perpendiculaire à un plan . . . . .	80
Mener par un point le plan perpendiculaire à une droite . . . . .	81
Mener par un point la perpendiculaire à une droite . . . . .	82
Perpendiculaire commune à deux droites . . . . .	82

LIVRE III. — MÉTHODES ET PROBLÈMES GÉNÉRAUX  
(Géométrie pure et géométrie descriptive)

CHAPITRE I. — Changements de plan . . . . .	83
CHAPITRE II. — Rotations . . . . .	86
§ 1. Rotations en géométrie pure . . . . .	86
§ 2. Rotations en géométrie descriptive . . . . .	86

CHAPITRE III. — Rabattements. . . . .	90
§ 1. Méthodes et tracés généraux ( <i>G. cotée et G. descriptive</i> ). . . . .	90
Règle du triangle rectangle. . . . .	91
Rabattement et relèvement d'une figure par recoupements. . . . .	92
Rabattement d'un plan vertical sur un plan horizontal. . . . .	93
§ 2. Opérations propres à la géométrie descriptive. . . . .	94
Rabattement par la frontale. . . . .	94
Rabattement d'un plan de bout sur un plan horizontal. . . . .	95
Opérations corrélatives . . . . .	95
§ 3. Projection d'un cercle. . . . .	96
CHAPITRE IV. — Distances et angles . . . . .	99
§ 1. Distances. . . . .	99
Distance de deux points . . . . .	99
Distance d'un point à un plan . . . . .	99
Distance d'un point à une droite . . . . .	100
§ 2. Angles . . . . .	101
Angle de deux droites . . . . .	101
Angle d'une droite et d'un plan. . . . .	103
Angle de deux plans . . . . .	104
Construction d'un trièdre dont on connaît les trois faces . . . . .	107

## LIVRE IV. — PROBLÈMES SIMPLES SUR QUELQUES SOLIDES USUELS

(*Géométrie cotée et géométrie descriptive.*)

CHAPITRE I. — Polyèdres usuels. . . . .	110
Représentation et ponctuation . . . . .	110
Intersection d'un prisme et d'une droite . . . . .	111
Section plane d'une pyramide . . . . .	112
CHAPITRE II. — La sphère . . . . .	114
Représentation de la sphère . . . . .	114
Détermination d'un point d'une sphère. . . . .	115
Problèmes sur les plans tangents . . . . .	116
Intersection d'une droite et d'une sphère . . . . .	117
Section plane d'une sphère. . . . .	118
EXERCICES. . . . .	122

**Contes et Nouvelles**, par Alfred de MUSET.

Cinq des meilleurs contes du charmant écrivain.

**Le Temps des Cerises**, par Clément HUOT.

Roman d'amour chaste qui trouvera surtout sa place dans la Bibliothèque des jeunes filles.

**Les Fiancés**, par Alexandre MANZONI.

Ce livre est d'une lecture attachante et saine. Le chef-d'œuvre de la littérature italienne.

**Amaryllis**, par C. DUCLOS (traduit du grec moderne).

C'est le récit d'une charmante idylle qui a pour cadre les environs d'Athènes. Tout y est gracieux.

**Le Capitaine Fracasse**, par Th. GAUTHIER (2 vol.)

Livre plein de mouvement, d'imprévu, de pittoresque.

**Le Roman de la Momie**, par Th. GAUTHIER.

Nous pénétrons dans la sépulture royale, où la Princesse Tahoré, nous livrera l'histoire de sa vie.

**Avatar, Jettatura**, par Th. GAUTHIER.

Dans *Avatar*, Th. Gauthier imagine qu'un avatar, secret dans les mystères de l'Inde, provient à opérer un échange d'âme entre deux personnages.

*Jettatura*, montre l'influence néfaste d'un jeune homme qui a le mauvais œil.

**Histoires extraordinaires**, par Edgar POE.

Traduction de Ch. BABELLAIN.

Ces Histoires plaisent par leur originalité.

**Une Étude en Rouge**, par Sir Arthur CONAN DOYLE.

Le personnage a une faculté d'observation extraordinaire.

**Les Derniers Jours de Pompéi**, par E. BOLWEN, LYTON.

Évocation saisissante de la vie des habitants de Pompéi au moment de sa destruction.

**Norine, Mlle Abeille**, par Ferdinand FASCH.

Deux récits riais de couleur locale, de naïveté.

**Jean de La Fontaine**, par BRUNEL et MORLINS.

Le roman de ses jeunes années.

**A travers l'Histoire de France**, par J. MICHONET.

Les meilleurs morceaux du grand écrivain.

**Le Grillon du Foyer. Le Naufragé. Cantique de Noël**, par Ch. DICKENS.

Trois contes justement célèbres.

**Les Aventures de Monsieur Pickwick**, par Ch. DICKENS.

Le plus amusant des livres de Dickens.

**Nicolas Nickleby**, par Ch. DICKENS.

Livre très émouvant et rempli de pittoresque.

**Les Chouans**, par Honoré de BALZAC.

Balzac s'y montre déjà maître dans l'art de peindre les sentiments de ses personnages.

**Pierrette**, par Honoré de BALZAC.

Aventure mélancolique. Mala ne convient-il pas de monter à la jeunesse, de temps à autre, que la vie a ses épreuves si elle ne manque pas de roses !

**Le Colonel Chabert. Adieu. La Grenadière**, par Honoré de BALZAC.

Trois nouvelles d'un très grand intérêt dramatique.

**Colomba. Matéo Falcone**, par P. MÉRIMÉE.

Deux nouvelles, chefs-d'œuvre de genre.

**Contes choisis de Boccace.**

Trente morceaux qui peuvent être lus par la jeunesse.

**La Vie des Araignées**, par J.-H. FABRE.

Volume extrait des "Sécheresses Entomologiques".

**L'Homme de neige**, par George SAND (2 vol.)

Le héros principal nous conduit d'Italie en Suède à travers la France et l'Allemagne et nous fait témoin d'aventures passionnantes.

**François le Champi**, par George SAND.

**La mare au diable**, par George SAND.

**La Petite Fadette**, par George SAND.

